28753

Sr.No.

E

SUBJECT CODE **BOOKLET CODE**

4 **A**

2012 (II)
MATHEMATICAL SCIENCES
TEST BOOKLET

Time : 3:00 Hours *Maximum Marks: 200*

INSTRUCTIONS

1. **You have opted for English as medium of Question Paper.** This Test Booklet contains one hundred and twenty (20 Part'A'+40 Part 'B' +60 Part 'C') Multiple Choice Questions (MCQs). You are required to answer a maximum of 15, 25 and 20 questions from part 'A' 'B' and 'C' respectively. If more than required number of questions are answered, only first 15, 25 and 20 questions in Parts 'A' 'B' and 'C' respectively, will be taken up for evaluation.
2. Answer sheet has been provided separately. Before you start filling up your particulars, please ensure that the booklet contains requisite number of pages and that these are not torn or mutilated. If it is so, you may request the Invigilator to change the booklet. Likewise, check the answer sheet also. Sheets for rough work have been appended to the test booklet.
3. Write your Roll No., Name, your address and Serial Number of this Test Booklet on the Answer sheet in the space provided on the side 1 of Answer sheet. Also put your signatures in the space identified.
4. **You must darken the appropriate circles with a pencil related to Roll Number, Subject Code, Booklet Code and Centre Code on the OMR answer sheet. It is the sole responsibility of the candidate to meticulously follow the instructions given on the Answer Sheet, failing which, the computer shall not be able to decipher the correct details which may ultimately result in loss, including rejection of the OMR answer sheet.**
5. Each question in Part 'A' carries **2** marks, Part 'B' **3** marks and Part 'C' **4.75** marks respectively. There will be negative marking @ 0.5marks in Part 'A' and @ '0.75 in Part 'B' for each wrong answer and no negative marking for Part 'C'.
6. Below each question in Part 'A' and 'B', four alternatives or responses are given. Only one of these alternatives is the "correct" option to the question. You have to find, for each question, the correct or the best answer. In Part 'C' each question may have **'ONE'** or **'MORE'** correct options. Credit in a question shall be given only on identification of **'ALL'** the correct options in Part 'C'. No credit shall be allowed in a question if any incorrect option is marked as correct answer.
7. Candidates found copying or resorting to any unfair means are liable to be disqualified from this and future examinations.
8. Candidate should not write anything anywhere except on answer sheet or sheets for rough work.
9. After the test is over, you MUST hand over the Test Booklet and answer sheet (OMR) to the invigilator.
10. Use of calculator is not permitted.

Roll No.......................

Name ....

I have verified all the informatioı filled in by the candidate.

....

Signatu·e of the Invig·'

क्रमांक 2440

H

2012 (II)
गणित विज्ञान
प्रश्न पत्र

विषय कोड **4** पुस्तिका कोड **A**

समय : 3:00 घंटे

पूर्णांक : 200 अंक

अनुदेश

1. **आपने हिन्दी को माध्यम चुना है ।** इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बीस (20 भाग 'A' में + 40 भाग 'B' + 60 भाग 'C' में) बहुल विकल्प प्रश्न (MCQ)दिए गए हैं । आपको भाग 'A' में से अधिकतम 15 और भाग 'B' में 25 प्रश्नों तथा भाग 'C' में से 20 प्रश्नों के उत्तर देने हैं । यदि निर्धारित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तब केवल पहले भाग 'A' से 15, भाग 'B' से 25 तथा भाग 'C' से 20 उत्तरों की जांच की जाएगी ।
2. उत्तर पत्र अलग से दिया गया है । अपना रोल नम्बर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही हैं तथा कहीं से कटे–फटे नहीं हैं । यदि ऐसा है तो आप इंविजीलेटर से पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं । इसी तरह से उत्तर पत्र को भी जांच लें । इस पुस्तिका में रफ काम करने के लिए अतिरिक्त पन्ने संलग्न हैं ।
3. उत्तर पत्र के पृष्ठ 1 में दिए गए स्थान पर अपना रोल नम्बर, नाम, अपना पता तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रमांक लिखिए । आपके हस्ताक्षर भी जरूरी हैं ।
4. **आप अपनी ओ.एम.आर. उत्तर पुस्तिका में रोल नंबर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित समुचित वृतों को अवश्य काला कर दें । यह एक मात्र परीक्षार्थी की जिम्मेदारी है कि वह उत्तर पुस्तिका में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विवरणों का सही तरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अंततः आपको हानि, जिससे आपकी उत्तर पुस्तिका की अस्वीकृति भी शामिल, हो सकती है ।**
5. भाग 'A' में प्रत्येक प्रश्न 2 अंक , भाग 'B' में प्रत्येक प्रश्न के 3 अंक तथा भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न 4.75 अंक का है । प्रत्येक गलत उत्तर का ऋणात्मक मूल्यांकन भाग 'A' में @ 0.5 अंक तथा भाग 'B' में @ 0.75 अंक से किया जाएगा । भाग 'C' के उत्तरों के लिए ऋणात्मक मूल्यांकन नहीं है ।
6. भाग 'A' तथा भाग 'B' के प्रत्येक प्रश्न के नीचे चार विकल्प दिए गए हैं । इनमें से केवल एक विकल्प ही "सही" अथवा "सर्वोत्तम हल" है । आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम हल ढूंढना है । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न का "एक" या "एक से अधिक" विकल्प सही हो सकते हैं । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही चयन करने पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा । सब सही विकल्पों का चयन नहीं करने पर कोइ आंशिक क्रेडिट नहीं दिया जाएगा ।
7. नकल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले अभ्यार्थियों का इस और अन्य भावी परीक्षाओं के लिए अयोग्य ठहराया जा सकता है ।
8. अभ्यार्थी को उत्तर या रफ पन्नों के अतिरिक्त कहीं और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए ।
9. परीक्षा समाप्त हो जाने पर परीक्षा पुस्तिका और उत्तर पत्र को इंविजीलेटर को **अवश्य** सौंप दीजिए।
10. केलकूलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है ।
11. किसी प्रश्न में विसंगति के मामले में अंग्रेजी संस्करण प्रबल होगा ।

रोल नंबर ....

नाम ....

अभ्यर्थी द्वारा भरी गई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ ।

....

इन्विजीलेटर के हस्ताक्षर

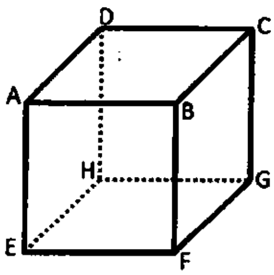
AH

भाग /PART A

1. *निम्न संख्याओं में कौन–सी उच्चतम है?*
Which of the following numbers is the largest?
$2^{3^4}, 2^{4^3}, 3^{2^4}, 3^{4^2}, 4^{2^3}, 4^{3^2}$.

1. 2^{3^4} 2. 3^{4^2} 3. 4^{3^2} 4. 4^{2^3}

2. *चित्र में घन* ABCDEFGH *का हर कोण* a *के समान है। शीर्ष* A, C *तथा* F *के त्रिकोण का क्षेत्रफल है:*
The cube ABCDEFGH in the figure has each edge equal to a. The area of the triangle with vertices at A, C and F is



1. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ 3. $\sqrt{3}\,a^2$ 4. $2\sqrt{3}\,a^2$

3. *इस शब्द* UGCCSIR *के अक्षरों के भिन्न विन्यासों की संख्या क्या है, ताकि* U *तथा* I *साथ–साथ नहीं आ सकते?*
What is the number of distinct arrangements of the letters of the word UGCCSIR so that U and I cannot come together?

1. 2520 2. 720 3. 1520 4. 1800

4. *मानें कि सात धनात्मक संखाओं का योगफल* 21 *है। इन संख्याओं के वर्गों के माध्य का न्यूनतम संभव मान क्या है?*
Suppose the sum of the seven positive numbers is 21. What is the minium possible value of the average of the sqaures of these numbers?

1. 63 2. 21 3. 9 4. 7

5. मानें कि / Let

$$A=\frac{1^{13}+2^{13}+3^{13}+\cdots+100^{13}}{100},\ B=\frac{1^{13}+3^{13}+5^{13}+\cdots+99^{13}}{50},\ C=\frac{2^{13}+4^{13}+6^{13}+\cdots+100^{13}}{50}$$

निम्न में से क्या सही है?

Which of the following is true?

1. B < C < A 2. A< B < C 3. B < A < C 4. C < A < B

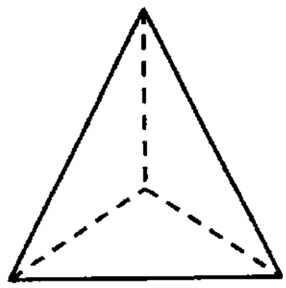
6. XY तल में स्थित 5 इकाइयों की त्रिज्या के एक वृत्त का केन्द्र प्रथम चतुर्थांश में है। वह x–अक्ष को छूता है तथा y–अक्ष में 6 इकाइयां लम्बा उसका एक चापकर्ण है। उसके केन्द्र के निर्देशांक हैं :

A circle of radius 5 units in the XY plane has its centre in the first quadrant, touches the *x-axis* and has a chord of length 6 units on the *y-axis*. The coordinates of its centre are

1. (4,6) 2. (3,5) 3. (5,4) 4. (4,5)

7. 6 मी. लम्बे तार से हर कोण 1 मी. वाला एक चतुष्फलक इस प्रकार बनाया जाता है कि हर कोण के लिए एक ही लट का उपयोग किया जाता है। तार को न्यूनतम बार काटा जाता है, जिसकी संख्या है :

A wire of length 6m is used to make a tetrahedron of each edge 1m, using only one strand of wire for each edge. The minimum number of times the wire has to be cut is



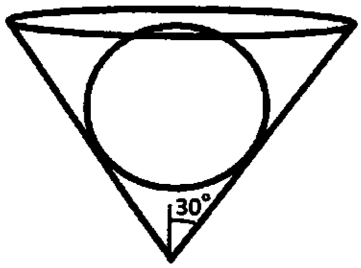
1. 2 2. 3 3. 1 4. 0

8. यदि निम्न अनुक्रम के अगले दो पदों का योगफल x है तो $\log_2 x$ का मान क्या है?

If the sum of the next two terms of the series below is x, what is the value of $\log_2 x$?

2, -4, 8, -16, 32, -64, 128,………

1. 128 2. 10 3. 256 4. 8

9. 

अर्ध–शीर्ष कोण 30^0 तथा ऊंचाई 10 से.मी. के एक शंकु पात्र का एक पतला ढ़क्कन है। पात्र के अन्दर रखा गया एक गोला ढ़क्कन को छूता है। गोले की त्रिज्या से.मी में है

A conical vessel with semi-vertical angle 30° and height 10.5 cm has a thin lid. A sphere kept inside it touches the lid. The radius of the sphere in cm is

1. 3.5
2. 5
3. 6.5
4. 7

10. अमर, अकबर तथा एन्टनी तीन मित्र हैं जिनमें एक वैद्य है, दूसरा अभियांत्रिक तथा तीसरा प्राद्यापक है। अमर अभियांत्रिक नहीं है। अकबर सबसे नाटा है। सबसे लम्ब ..क्ति वैद्य है। अभियांत्रिक की लम्बाई बाकी दोनों की लम्बाईयों का ज्यामितीय माध्य है। तो निम्न में से क्या सही है?

Amar, Akbar and Anthony are three friends, one of whom is a doctor, another is an engineer and the third is a professor. Amar is not an engineer. Akbar is the shortest. The tallest person is a doctor. The engineer's height is the geometric mean of the heights of the other two. Then which of the following is true?

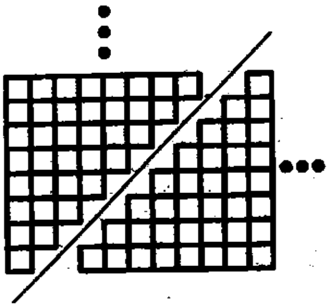
1. Amar is a doctor and he is the tallest
2. Akbar is a professor and he is the tallest
3. Anthony is an engineer and he is shortest
4. Anthony is a doctor and he is the tallest

11. अगर 100 बिल्लियां 100 मिनट में 100 चूहे पकड़ती हैं तो 7 बिल्लियों को 7 चूहों को पकड़ने मे कितना समय लेगा?
If 100 cats catch 100 mice in 100 minutes, then how long will it take for 7 cats to catch 7 mice?

1. 100/7 मिनट /minutes
2. 100 मिनट /minutes
3. 49/100 मिनट /minutes
4. 7 मिनट /minutes

12. निम्न चित्र किसका निरूपण करता है?

What does this diagram demonstrate?



1. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n\cdot(n+1)}{2}$
2. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$
3. $1+3+\cdots+(2n+=-1)=n^2$
4. $2^2+4^2+\cdots+(2n)^2=\dfrac{2\cdot n(n+1)(2n+1)}{3}$

13. मानें कि एक बक्से में N अलग रंग के मोजे हैं। मानें कि N एक सम संख्या है। यदि आप एक बार में एक ही मोजा निकालते हैं, एक सुमेल मोजों की जोड़ी प्राप्त करने तक कितने मोजों को आपको निकालना होगा?

Suppose there are socks of N different colors in a box. If you take out one sock at a time, what is the maximum number of socks that you have to take out before a matching pair is found? Assume that N is an even number.

1. N 2. $N+1$ 3. $N-1$ 4. $N/2$

14. 4 बजे के बाद कब घडी में घंटे व मिनट की सुइयां एक दूसरे के सम्मुख होंगी?

At what time after 4 O' clock, the hour and the minute hands will lie opposite to each other?

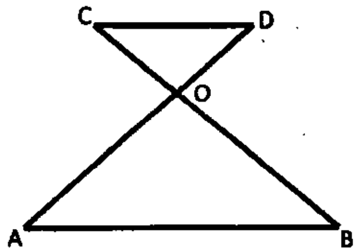
1. $4-50'-31''$ 2. $4-52'-51''$ 3. $4-53'-23''$ 4. $4-54'-33''$

15. निम्न वक्रों में कौन–सा x–अक्ष को सिर्फ छूता है?

Which of the following curves just touches the x axis?

1. $y=x^2-x+1$
2. $y=x^2-2x+2$
3. $y=x^2-10x+25$
4. $y=x^2-7x+12$

16.

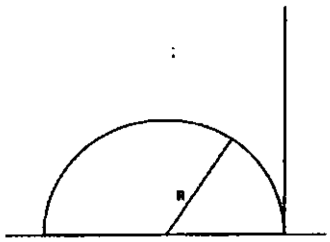


यदि AB, CD के समान्तर है तथा AO, 2OD के समान है, तो त्रिकोण OAB का क्षेत्रफल त्रिकोण OCD के क्षेत्रफल से कितने गुना बड़ा है?

If AB is paralled to CD and AO=2OD, then the area of triangle OAB is bigger than the area of triangle OCD by a factor of

1. 2   2. 3   3. 4   4. 8

17.



R त्रिज्या के एक अर्धवृत्त महराब के एक टांग पर एक ऊर्ध्वाधर खम्भा जमीन पर बिठाया गया है। महराब के शिखर पर स्थित एक चींटी खम्भे के नोक की कोणीय ऊंचाई को 45^0 पाता है। खम्भे की ऊंचाई है :

A semi-circular arch of radius R has a vertical pole put on the ground together with one of its legs. An ant on the top of the arch finds the angular height of the tip of the pole to be 45°. The height of the pole is

1. $\sqrt{2}R$ 2. $\sqrt{3}R$ 3. $\sqrt{4}R$ 4. $\sqrt{5}R$

18. मानें कि हम एक बड़े गोले से N एकसमान छोटे गोले बनाते हैं। छोटे गोलों का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल बड़े गोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का X गुना है जहां X है

Suppose we make N identical smaller spheres from a big sphere. The total surface area of the smaller spheres is X times the total surface area of the big sphere, where X is

1. $\sqrt{N}$ 2. 1   3. $N^{1/3}$ 4. N^3

19. अनुक्रम 24] 30] 33] 39] 51] .... की अगली संख्यां क्या है?

What is the next number in the sequence 24, 30, 33, 39, 51,------?

1. 57   2. 69   3. 54   4. 81

20. एक सममतल में चार रेखायें खींची जाती हैं जिनमें से न कोई दो समान्तर है, न कोई तीन संगामी हैं। पूर्ववर्ती चार रेखाओं की प्रतिच्छेद बिन्दुओं को जोड़ते हुये रेखायें खींची जाती हैं। इस प्रकार प्राप्त की गयी नयी रेखाओं की संख्या है

Four lines are drawn on a plane with no two parallel and no three concurrent. Lines are drawn joining the points of intersection of the previous four lines. The number of new lines obtained this way is

1. 3 2. 5 3. 12 4. 2

भाग /PART B

21. मानें कि फलन f, $\mathbb{R}$ पर दो बार अवकलनीय है। सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए दिया गया है कि $f''(x) > 0$

1. $\mathbb{R}$ पर $f(x) = 0$ का ठीक–ठीक दो हल हैं।
2. $f(x) = 0$ का धनात्मक हल तभी है जब $f(0) = 0$ और $f'(0) = 0$ हैं।
3. $f(x) = 0$ का कोई धनात्मक हल नहीं है अगर $f(0) = 0$ और $f'(0) > 0$ हैं।
4. $f(x) = 0$ का कोई धनात्मक हल नहीं है अगर $f(0) = 0$ और $f'(0) < 0$ हैं।

21. Let f be a twice differentiable function on $\mathbb{R}$. Given that $f''(x) > 0$ for all $x \in \mathbb{R}$,

1. $f(x) = 0$ has exactly two solutions on $\mathbb{R}$
2. $f(x) = 0$ has a positive solution if $f(0) = 0$ and $f'(0) = 0$.
3. $f(x) = 0$ has no positive solution if $f(0) = 0$ and $f'(0) > 0$.
4. $f(x) = 0$ has no positive solution if $f(0) = 0$ and $f'(0) < 0$.

22. मानें कि $[a,b]$ पर f एक संततः अवकलनीय वास्तविक मान फलन है ताकि सभी $x \in [a,b]$ के लिए $|f'(x)| \le K$। मानें कि एक विभाजन $P = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ के लिए $U(f,P)$ व $L(f,P)$ क्रमशः f के P से सापेक्ष, उपरी एवं निम्न रीमान योग हैं। तो

1. $|L(f,P)| \le K(b-a) \le |U(f,P)|$.
2. $U(f,P) - L(f,P) \le K(b-a)$.
3. $U(f,P) - L(f,P) \le K\|P\|$, जहां $\|P\| = \underset{0 \le i \le n-1}{\text{उच्चतम}}(a_{i+1} - a_i)$ विभाजन का मानक है।
4. $U(f,P) - L(f,P) \le K\|P\|(b-a)$.

4.

22. Let f be a continuously differentiable real-valued function on $[a,b]$ such that $|f'(x)| \le K$ for all $x \in [a,b]$. For a partition $P = \{a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b\}$, let $U(f,P)$ and $L(f,P)$ denote the upper and lower Riemann sums of f with respect to P. Then

1. $|L(f,P)| \le K(b-a) \le |U(f,P)|$.
2. $U(f,P) - L(f,P) \le K(b-a)$.
3. $U(f,P) - L(f,P) \le K\|P\|$, where $\|P\| = \max\limits_{0 \le i \le n-1}(a_{i+1} - a_i)$ is the norm of the partition.
4. $U(f,P) - L(f,P) \le K\|P\|(b-a)$.

23. मानें कि $\mathbb{R}$ पर f एक एकदिष्ट अह्रासमान वास्तविक मान फलन है। तो

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ हर बिन्दु a पर अस्तित्व रखता है।
2. यदि $a < b$, तो $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \le \lim\limits_{x \to b-} f(x)$ है।
3. f एक अपरिबद्ध फलन है।
4. फलन $g(x) = e^{-f(x)}$ एक परिबद्ध फलन है।

23. Let f be a monotone nondecreasing real-valued function on $\mathbb{R}$. Then

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ exists at each point a.
2. If $a < b$, then $\lim\limits_{x \to a+} f(x) \le \lim\limits_{x \to b-} f(x)$.
3. f is an unbounded function.
4. The function $g(x) = e^{-f(x)}$ is a bounded function.

24. मानें कि $\mathbb{R}^3$ पर (स्थिर $\alpha \in \mathbb{R}$ के लिए) f एक वास्तविक–मान फलन है जो $f(rx) = r^{\alpha} f(x)$ का समाधान किसी भी $r > 0$ एवं $x \in \mathbb{R}^3$ के लिए करता है।

1. जभी एक $\beta > 0$ के लिए $\|x\| = \|y\| = \beta$ है, अगर $f(x) = f(y)$ है तो $f(x) = \beta \|x\|^{\alpha}$ है।
2. जभी $\|x\| = \|y\| = 1$ है, अगर $f(x) = f(y)$ है तो $f(x) = \|x\|^{\alpha}$ है।
3. जभी $\|x\| = \|y\| = 1$ है, यदि $f(x) = f(y)$ है तो किसी भी अचर c के लिए $f(x) = c\|x\|^{\alpha}$ है।
4. जभी $\|x\| = \|y\|$ है, यदि $f(x) = f(y)$ है तो f को एक अचर फलन होना चाहिए ।

24. Let f be a real-valued function on $\mathbb{R}^3$ satisfying (for a fixed $\alpha \in \mathbb{R}$) $f(rx) = r^{\alpha} f(x)$ for any $r>0$ and $x \in \mathbb{R}^3$.

1. If $f(x) = f(y)$ whenever $\|x\| = \|y\| = \beta$ for a $\beta > 0$, then $f(x) = \beta \|x\|^{\alpha}$.
2. If $f(x) = f(y)$ whenever $\|x\| = \|y\| = 1$, then $f(x) = \|x\|^{\alpha}$.
3. If $f(x) = f(y)$ whenever $\|x\| = \|y\| = 1$, then $f(x) = c\|x\|^{\alpha}$, for some constant c.
4. If $f(x) = f(y)$ whenever $\|x\| = \|y\|$, then f must be a constant function.

25. निम्न वास्तविक मान फलनों में से जो $(0,1)$ पर हैं, कौन–सा एकसमानतः संतत है?

1. $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
3. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.
4. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

25. Which of the following real-valued functions on $(0,1)$ is uniformly continuous?

1. $f(x) = \frac{1}{x}$.
2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
3. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$.
4. $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

26. मानें कि X एक दूरीक समष्टि है एवं $A \subseteq X$ एक संबद्ध समुच्चय है जिसकी कम से कम दो भिन्न बिन्दुएं हैं। तो A पर होने वाली भिन्न बिन्दुओं की संख्या है

1. 2.
2. 2 से अधिक, पर सीमित ।
3. गणनीयतः असीम ।
4. अगणनीय ।

26. Let X be a metric space and $A \subseteq X$ be a connected set with at least two distinct points. Then the number of distinct points in A is

1. 2 .
2. more than 2, but finite.
3. countably infinite.
4. uncountable.

27. मानें कि n एक धनात्मक पूर्णांक है एवं $M_n(\mathbb{R})$ सभी $n \times n$ वास्तविक आव्यूहों की समष्टि को निर्दिष्ट करता है। जभी $A \in M_n(\mathbb{R})$ सममित या विषमसममित है, यदि $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ एक रैखिक रूपान्तरण है ताकि $T(A) = 0$ तो T की जाति है :

1. $\frac{n(n+1)}{2}$. 2. $\frac{n(n-1)}{2}$. 3. n. 4. 0.

27. Let n be a positive integer and let $M_n(\mathbb{R})$ denote the space of all $n \times n$ real matrices. If $T: M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ is a linear transformation such that $T(A) = 0$ whenever $A \in M_n(\mathbb{R})$ is symmetric or skew-symmetric, then the rank of T is

1. $\frac{n(n+1)}{2}$. 2. $\frac{n(n-1)}{2}$. 3. n. 4. 0.

28. मानें कि $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ एवं $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ दो रैखिक रूपान्तरण हैं ताकि $T \circ S$ $\mathbb{R}^3$ का तत्समक प्रतिचित्र है। तो

1. $S \circ T$ $\mathbb{R}^4$ का तत्समक प्रतिचित्र है।
2. $S \circ T$ एकैकी है परन्तु समानोपरी नहीं।
3. $S \circ T$ समानोपरी है परन्तु एकैकी नहीं।
4. $S \circ T$ न तो समानोपरी है न तो एकैकी ।

28. Let $S: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ and $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ be linear transformations such that $T \circ S$ is the identity map of $\mathbb{R}^3$. Then

1. $S \circ T$ is the identity map of $\mathbb{R}^4$.
2. $S \circ T$ is one-one, but not onto.
3. $S \circ T$ is onto, but not one-one.
4. $S \circ T$ is neither one-one nor onto.

29. तीन अवयवों का क्षेत्र $F_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ पर मानें कि V एक तीन–विमीय सदिश समष्टि है। V के भिन्न एक–विमीय उपसमष्टियों की संख्या है :

1. 13. 2. 26. 3. 9. 4. 15.

29. Let V be a 3-dimensional vector space over the field $F_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ of 3 elements. The number of distinct 1-dimensional subspaces of V is

1. 13. 2. 26. 3. 9. 4. 15.

30. मानें कि V एक आंतर गुणन समष्टि है जो रैखिक बहुपदों से बना है, $p: [0, 1] \to \mathbb{R}$ (अर्थात् V में $p(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ के रूप में बहुपदें p हैं) जिनके साथ आंतर गुणन को, $p, q \in V$ के लिए $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ से परिभाषित है । V का एक प्रसामान्य लांबिक आधार है :

1. $\{1, x\}$. 2. $\{1, x\sqrt{3}\}$. 3. $\{1, (2x-1)\sqrt{3}\}$ 4. $\{1, x - \frac{1}{2}\}$.

30. Let V be the inner product space consisting of linear polynomials, p: $[0, 1] \to \mathbb{R}$ (i.e., V consists of polynomials p of the form $p(x) = ax + b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$), with the inner product defined by

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx \quad \text{for } p, q \in V.$$

An orthonormal basis of V is

1. $\{1, x\}$.
2. $\{1, x\sqrt{3}\}$.
3. $\{1, (2x-1)\sqrt{3}\}$.
4. $\{1, x-\frac{1}{2}\}$.

31. मानें कि $f(x)$ 4×4 आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

का अल्पिष्ठ बहुपद है। तो 4×4 आव्यूह $f(A)$ की जाति है :

1. 0.
2. 1.
3. 2.
4. 4.

31. Let $f(x)$ be the minimal polynomial of the 4×4 matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Then the rank of the 4×4 matrix $f(A)$ is

1. 0.
2. 1.
3. 2.
4. 4.

32. मानें कि a, b, c धनात्मक वास्तविक अंक हैं ताकि $b^2 + c^2 < a < 1$. 3×3 आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 1 & b & c \\ b & a & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ पर विचारें ।

1. A के सभी अभिलक्षणांक ऋणात्मक वास्तविक अंक हैं।
2. A के सभी अभिलक्षणांक धनात्मक वास्तविक अंक हैं।
3. A का एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक अभिलक्षणांक हो सकते हैं।
4. A के अभिलक्षणांक अवास्तविक सम्मिश्र संख्याएं हो सकते हैं।

32. Let a, b, c be positive real numbers such that $b^2+c^2<a<1$. Consider the 3×3 matrix

$$A=\begin{bmatrix}1 & b & c\\ b & a & 0\\ c & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

1. All the eigenvalues of A are negative real numbers.
2. All the eigenvalues of A are positive real numbers.
3. A can have a positive as well as a negative eigenvalue.
4. Eigenvalues of A can be non-real complex numbers.

33. $f(z)=e^z$, $g(z)=e^{iz}$ से परिभाषित फलनों $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ पर विचारें। मानें कि $S=\{z\in\mathbb{C}:$ वास्तविक $z\in[-\pi,\pi]\}$ तो

1. f एक समानोपरी सर्वत्र वैश्लेषिक फलन है।
2. $\mathbb{C}$ पर g एक परिबद्ध फलन है।
3. S पर f परिबद्ध है।
4. S पर g परिबद्ध है।

33. Consider the functions $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ defined by $f(z)=e^z$, $g(z)=e^{iz}$. Let $S=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z\in[-\pi,\pi]\}$. Then

1. f is an onto entire function.
2. g is a bounded function on $\mathbb{C}$.
3. f is bounded on S.
4. g is bounded on S.

34. मानें कि $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ $f(0)=0$ के साथ एक होलोमार्फिक फलन है, जहां $\mathbb{D}$ खुली मानक चक्रिका $\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ है। तो

1. $|f'(0)|=1$.
2. $|f(\frac{1}{2})|\le\frac{1}{2}$.
3. $|f(\frac{1}{2})|\le\frac{1}{4}$.
4. $|f'(0)|\le\frac{1}{2}$.

34. Let $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ be a holomorphic function with $f(0)=0$, where $\mathbb{D}$ is the open unit disc $\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$. Then

1. $|f'(0)|=1$.
2. $|f(\frac{1}{2})|\le\frac{1}{2}$.
3. $|f(\frac{1}{2})|\le\frac{1}{4}$.
4. $|f'(0)|\le\frac{1}{2}$.

35. घात श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$ पर विचारें। इस श्रेणी की अभिसरण त्रिज्या है :

1. 0.
2. ∞.
3. 1.
4. 1 से अधिक एक वास्तविक अंक ।

35. Consider the power series $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$. The radius of convergence of this series is

1. 0.
2. ∞.
3. 1.
4. a real number greater than 1.

36. 265 व्यक्तियों के गुट्ट में 200 को गाना पसंद है, 110 को नाचना एवं 55 को चित्र बनाना। यदि 60 व्यक्तियों को गाना और नाचना दोनों पसंद हैं, 30 को दोनों गाना व चित्र बनाना एवं 10 को तीनों क्रियाएं पसंद है तो सिर्फ नाचना व चित्र बनाना पसंद करने वाले व्यक्तियों की संख्या क्या है?

1. 10.
2. 20.
3. 30.
4. 40.

36. In a group of 265 persons, 200 like singing, 110 like dancing and 55 like painting. If 60 persons like both singing and dancing, 30 like both singing and painting and 10 like all three activities, then the number of persons who like only dancing and painting is

1. 10.
2. 20.
3. 30.
4. 40.

37. 7^{81} के अंतिम दो अंक हैं :

1. 07.
2. 17.
3. 37.
4. 47.

37. The last two digits of 7^{81} are

1. 07.
2. 17.
3. 37.
4. 47.

38. निम्न में से कौनसे क्षेत्रों में बहुपद

$$x^3-312312x+123123$$

$\mathbb{F}[x]$ पर अलघुकरणीय है?

1. क्षेत्र $\mathbb{F}_3$, तीन अवयवों के साथ।
2. क्षेत्र $\mathbb{F}_7$, सात अवयवों के साथ।
3. क्षेत्र $\mathbb{F}_{13}$, तेरह अवयवों के साथ।
4. परिमेय संख्याओं का क्षेत्र $\mathbb{Q}$ ।

38. In which of the following fields, the polynomial

$$x^3 - 312312x + 123123$$

is irreducible in $\mathbb{F}[x]$?

1. the field $\mathbb{F}_3$ with 3 elements.
2. the field $\mathbb{F}_7$ with 7 elements.
3. the field $\mathbb{F}_{13}$ with 13 elements.
4. the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers.

39. मानें कि ω एक सम्मिश्र संख्या है ताकि $\omega^3=1$ एवं $\omega \neq 1$ है। परिमेय संख्याओं के क्षेत्र $\mathbb{Q}$ पर $\sqrt[3]{2}$ एवं ω से जनित L एक क्षेत्र $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2},\omega\right)$ है। तो L के उपक्षेत्रों K की संख्या है, जहां $\mathbb{Q} \subsetneq \mathrm{K} \subsetneq \mathrm{L}$ है।

1. 2.
2. 3.
3. 4.
4. 5.

39. Let ω be a complex number such that $\omega^3=1$ and $\omega \neq 1$. Suppose L is the field $\mathbb{Q}\left(\sqrt[3]{2},\omega\right)$ generated by $\sqrt[3]{2}$ and ω over the field $\mathbb{Q}$ of rational numbers. Then the number of subfields K of L such that $\mathbb{Q} \subsetneq \mathrm{K} \subsetneq \mathrm{L}$ is

1. 2.
2. 3.
3. 4.
4. 5.

40. मानें कि $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f(0,\cdots,0)=0$ के साथ एक रैखिक प्रतिचित्र है। तो समुच्चय

$$\left\{ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1 \right\}$$ इसके समान है :

1. कोई $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ के लिए $[-a, a]$.
2. $[0, 1]$.
3. कोई $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ के लिए $[0, a]$.
4. कोई $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$ के लिए $[a, b]$.

40. Let $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a linear map with $f(0,\cdots,0)=0$. Then the set

$$\left\{ f(x_1, x_2, \cdots, x_n) : \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \leq 1 \right\}$$ equals

1. $[-a, a]$ for some $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.
2. $[0, 1]$.
3. $[0, a]$ for some $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$.
4. $[a, b]$ for some $a, b \in \mathbb{R}$, $0 \leq a < b$.

41. मानें कि $y_1(x)$ एवं $y_2(x)$ अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = y + 17$ के हल हैं, जहां $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ प्रारंभिक प्रतिबंध हैं। तो

1. y_1 व y_2 कभी प्रतिच्छेदित नहीं होंगे।
2. y_1 व y_2 $x=17$ पर प्रतिच्छेदित होंगे।
3. y_1 व y_2 $x=e$ पर प्रतिच्छेदित होंगे।
4. y_1 व y_2 $x=1$ पर प्रतिच्छेदित होंगे।

41. Let $y_1(x)$ and $y_2(x)$ be the solutions of the differential equation $\frac{dy}{dx} = y + 17$ with initial conditions $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$. Then

1. y_1 and y_2 will never intersect.
2. y_1 and y_2 will intersect at $x=17$.
3. y_1 and y_2 will intersect at $x=e$.
4. y_1 and y_2 will intersect at $x=1$.

42. मानें कि $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$,

$$\frac{dy}{dt} = Ay; t > 0$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

का समाधान करता है, जहां A एक 2×2 अचर आव्यूह है जिसकी प्रविष्टियां वास्तविक है एवं जो अनुरेख $A = 0$ व सारणिक $A > 0$ के समाधान करते हैं। तो दोनों $y_1(t)$ व $y_2(t)$

1. एकदिष्ट ह्रासमान, t के फलन हैं।
2. एकदिष्ट वर्धमान, t के फलन हैं।
3. t के दोलायमान फलन हैं।
4. t के अचर फलन हैं।

42. Let $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ satisfy

$$\frac{dy}{dt} = Ay; t > 0$$

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

where A is a 2×2 constant matrix with real entries satisfying trace $A = 0$ and

$\det A > 0$. Then $y_1(t)$ and $y_2(t)$ both are

1. monotonically decreasing functions of t.
2. monotonically increasing functions of t.
3. oscillating functions of t.
4. constant functions of t.

43. *आंशिक अवकल समीरण*

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

यहां अतिपरवलयिक है।

1. *द्वितीय तथा चतुर्थ चतुर्थांशों में।*
2. *प्रथम तथा द्वितीय चतुर्थांशों में।*
3. *द्वितीय तथा तृतीय चतुर्थांशों में।*
4. *प्रथम तथा तृतीय चतुर्थांशों में।*

43. The partial differential equation

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

is hyperbolic in

1. the second and fourth quadrants.
2. the first and second quadrants.
3. the second and third quadrants.
4. the first and third quadrants.

44. *आद्यबिन्दु में केंद्रित एवं सीमा पर* sin2θ *का मूल्य लेते हुए एक परिबद्ध प्रसंवादी फलन है :*

1. $r^2\sin 2\theta$.
2. $r\sin 2\theta$.
3. $\frac{1}{r}\sin 2\theta$.
4. $\frac{1}{r^2}\sin 2\theta$.

44. A bounded harmonic function in the unit disc centered at origin and taking the value $\sin 2\theta$ on the boundary is

1. $r^2\sin 2\theta$.
2. $r\sin 2\theta$.
3. $\frac{1}{r}\sin 2\theta$.
4. $\frac{1}{r^2}\sin 2\theta$.

45. *समीकरणों का निकाय*

$$x+y+z=1$$
$$2x+3y-z=5$$
$$x+2y-kz=4$$

जहां $k\in\mathbb{R}$, *की अनंत संख्या में हल,* k *के इस मूल्य पर होंगे*

1. $k=0$.
2. $k=1$.
3. $k=2$.
4. $k=3$.

45. The system of equations

$x+y+z=1$
$2x+3y-z=5$
$x+2y-kz=4$

where $k\in\mathbb{R}$, has an infinite number of solutions for

1. $k=0$.
2. $k=1$.
3. $k=2$.
4. $k=3$.

46. मानें कि

$$J(u)=\int_0^1\left[u_x^2+4\frac{u^2}{x^2}\right]xdx,$$

जहां $u(x)$ $[0,1]$ पर परिभाषित एक मसृण फलन है जो $u(0)=0$ व $u(1)=1$ का समाधान करता है। निम्न में से कौन–सा फलन J को न्यूनतमीकृत करता है?

1. $u(x)=x^2$.
2. $u(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$.
3. $u(x)=\frac{1}{2}x^2$.
4. $u(x)=\frac{1}{4}x^2$.

46. Let

$$J(u)=\int_0^1\left[u_x^2+4\frac{u^2}{x^2}\right]xdx,$$

where $u(x)$ is a smooth function defined on $[0,1]$ satisfying $u(0)=0$ and $u(1)=1$. Which of the functions minimizes J?

1. $u(x)=x^2$.
2. $u(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$.
3. $u(x)=\frac{1}{2}x^2$.
4. $u(x)=\frac{1}{4}x^2$.

47. समघात फ्रेडहोम समाकल समीकरण $\phi(x)=\lambda\int_0^1 e^{x+t}\phi(t)dt$ के लिए एक अतुच्छ हल का अस्तित्व तभी होता है जब λ का मूल्य होता है :

1. $\lambda=\frac{2}{e-1}$.
2. $\lambda=\frac{1}{e^2+1}$.
3. $\lambda=\frac{1}{e+1}$.
4. $\lambda=\frac{2}{e^2-1}$.

47. For the homogeneous Fredholm integral equation $\phi(x)=\lambda\int_0^1 e^{x+t}\phi(t)\,dt$, a non-trivial solution exists, when λ has the value

1. $\lambda=\frac{2}{e-1}$.
2. $\lambda=\frac{1}{e^2+1}$.
3. $\lambda=\frac{1}{e+1}$.
4. $\lambda=\frac{2}{e^2-1}$.

48. *n सरेख परमाणुओं से बने एक अणु के कंपन स्वातंत्र्य कोटियों की कुल संख्या है :*

1. $3n-6$.
2. $3n-5$.
3. $3n-2$.
4. $3n$.

48. The total number of vibrational degrees of freedom of a molecule containing n collinear atoms is

1. $3n-6$.
2. $3n-5$.
3. $3n-2$.
4. $3n$.

49. *मानें कि $X_1, X_2, \cdots$ स्वतंत्र रूपी एकसमानतः बंटित यादृच्छिक चर है एवं $T_n=\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}$ है।*

1. *T_n-1 का सीमांत बंटन स्वातंत्र्य कोटि एक का χ^2 है।*
2. *$\frac{T_n-1}{\sqrt{n}}$ का सीमांत बंटन प्रसामान्य है, माध्य 0 एवं प्रसरण 2 के साथ।*
3. *$\sqrt{n}(T_n-1)$ का सीमांत बंटन स्वातंत्र्य कोटि एक का χ^2 है।*
4. *$\sqrt{n}(T_n-1)$ का सीमांत बंटन प्रसामान्य है, माध्य 0 एवं प्रसरण 2 के साथ।*

49. Let $X_1, X_2, \cdots$ be i.i.d. standard normal random variables and let $T_n=\frac{X_1^2+\cdots+X_n^2}{n}$. Then

1. The limiting distribution of T_n-1 is χ^2 with 1 degree of freedom.
2. The limiting distribution of $\frac{T_n-1}{\sqrt{n}}$ is normal with mean 0 and variance 2.
3. The limiting distribution of $\sqrt{n}(T_n-1)$ is χ^2 with 1 degree of freedom.
4. The limiting distribution of $\sqrt{n}(T_n-1)$ is normal with mean 0 and variance 2.

50. मानें कि $\{p_n, n \geq 0\}$ अंकों का एक अनुक्रम है, ताकि सभी $n \geq 0$ के लिए $p_n > 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ एवं $\sum_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$ हैं। स्थिति समष्टि $\{0,1,2,\cdots\}$ पर एक मार्कोव श्रृंखला पर विचारें जिसका संक्रमण प्रायिकता आव्यूह है

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

तो यह श्रृंखला

1. अलघुकरणीय <u>नहीं</u> है।
2. अलघुकरणीय एवं क्षणिक है।
3. अलघुकरणीय एवं शून्य–पुनरावृत है।
4. अलघुकरणीय एवं धनात्मक–पुनरावृत है।

50. Let $\{p_n, n \geq 0\}$ be a sequence of numbers, such that for all $n \geq 0$, $p_n > 0, \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ and $\sum_{n=0}^{\infty} np_n < \infty$. Consider a Markov chain on the state space $\{0,1,2,\cdots\}$ with transition probability matrix

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Then

1. the chain is <u>not</u> irreducible.
2. the chain is irreducible and transient.
3. the chain is irreducible and null recurrent.
4. the chain is irreducible and positive recurrent.

51. मानें कि X_1, X_2, X_3, X_4 स्वतंत्ररूपी एकसमानतः बंटित यादृच्छिक चर हैं जो मूल्य 1 एवं −1, हर एक की प्रायिकता ½ के साथ लेते हैं। तो $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)^4$ का मूल्य है :

1. 4.
2. 76.
3. 16.
4. 12.

4.

51. Suppose X_1, X_2, X_3, X_4 are i.i.d. random variables taking values 1 and -1 with probability ½ each. Then $E(X_1+X_2+X_3+X_4)^4$ equals

1. 4. 2. 76. 3. 16. 4. 12.

52. मानें कि $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ का प्रसामान्य बंटन $(\mu_{2\times1}, \Sigma_{2\times2})$ है, जहां $\Sigma_{2\times2}$ व्युतक्रमणीय है । मानें कि $X_3 = -2X_2$ है। तो निम्न में से किसका विचित्र प्रसामान्य बंटन है?

1. $\begin{pmatrix} X_1 - 2X_2 \\ X_2 - 2X_3 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} X_1 - X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 2X_2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ 2X_1 + 2X_3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 \end{pmatrix}$.

52. Suppose that $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ has Normal $(\mu_{2\times1}, \Sigma_{2\times2})$ distribution, where $\Sigma_{2\times2}$ is nonsingular. Let $X_3 = -2X_2$. Then which of the following has a singular normal distribution?

1. $\begin{pmatrix} X_1 - 2X_2 \\ X_2 - 2X_3 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} X_1 - X_2 - X_3 \\ 2X_1 + 2X_2 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} X_1 + X_2 \\ 2X_1 + 2X_3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 + X_2 \end{pmatrix}$.

53. एक वर्तुल की त्रिज्या, माध्य शून्य एवं प्रसरण σ^2 के एक प्रसामान्य बंटन को पालन करने वाली नापन त्रुटि के साथ नापा जाता है। मानें कि $X_1, \cdots, X_n$ त्रिज्या के *n* नाप हैं। मानें कि $\bar{x}$ एवं $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$ क्रमशः नमूना माध्य एवं नमूना प्रसरण हैं। वर्तुल के क्षेत्रफल का अनभिनत आकल निम्न में से क्या है?

1. $\pi\bar{x}^2$. 2. $\frac{\pi}{n}\sum x_i^2$. 3. $\pi\left[\frac{1}{n}\sum x_i^2 - s^2\right]$. 4. $\pi\left[\bar{x}^2 - s^2\right]$.

53. The radius of a circle is measured with an error of measurement which is normally distributed with mean 0 and variance σ^2. Let $X_1, \cdots, X_n$ be *n* measurements on the radius. Let $\bar{x}$ and $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x_i - \bar{x})^2$ be the sample mean and sample variance respectively. Which of the following represents an unbiased estimate of the area of the circle?

1. $\pi\bar{x}^2$. 2. $\frac{\pi}{n}\sum x_i^2$. 3. $\pi\left[\frac{1}{n}\sum x_i^2 - s^2\right]$. 4. $\pi\left[\bar{x}^2 - s^2\right]$.

54. मानें कि व्यक्ति A एवं व्यक्ति B H_o: $\mu=2$ बनाम H_1: $\mu>2$ के परीक्षण हेतु क्रमशः 15 एवं 20 आमाप के यादृच्छिक नमूने $N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$ से चुनते है। दोनों पक्षों में प्रेक्षित नमूना–माध्य एवं नमूना–मानक विचलन समान है इन मूल्यों के साथ : $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1.8$, $s_1 = s_2 = s$ । दोनों सामान्य t-परीक्षण का उपयोग करते हैं एवं p-मूल्यों p_A व p_B का कथन करते हैं। तो निम्न में से क्या सही है?

1. $p_A > p_B$.
2. $p_A = p_B$.
3. $p_A < p_B$.
4. p_A व p_B के बीच का संबंध s के मूल्य पर निर्भर है।

54. Suppose person A and person B draw random samples of sizes 15 and 20 respectively from $N(\mu,\sigma^2)$, $\sigma^2>0$ for testing H_o: $\mu=2$ against H_1: $\mu>2$. In both the cases, the observed sample means and sample standard deviations are same with values $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 1.8$, $s_1 = s_2 = s$. Both of them use the usual t-test & state the p-values p_A and p_B respectively. Then which of the following is correct?

1. $p_A > p_B$.
2. $p_A = p_B$.
3. $p_A < p_B$.
4. Relation between p_A and p_B depends on the value of s.

55. द्वयी प्रतिक्रिया Y एवं दो व्याख्यात्मक चर X_1 व X_2 के एक संभार समाश्रयण निदर्श में X_2 का गुणांक है :

1. $\dfrac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=1|X_1,X_2)}$.

2. $\log\left\{\dfrac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=1|X_1,X_2)}\right\}$.

3. $\dfrac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=0|X_1,X_2+1)} \times \dfrac{P(Y=0|X_1,X_2)}{P(Y=1|X_1,X_2)}$.

4. $\log\left\{\dfrac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=0|X_1,X_2+1)} \times \dfrac{P(Y=0|X_1,X_2)}{P(Y=1|X_1,X_2)}\right\}$

55. In logistic regression model involving a binary response Y and two explanatory variables X_1 and X_2, the coefficient of X_2 is

1. $\frac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=1|X_1,X_2)}$.
2. $\log\left\{\frac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=1|X_1,X_2)}\right\}$.
3. $\frac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=0|X_1,X_2+1)}\times\frac{P(Y=0\mid X_1,X_2)}{P(Y=1|X_1,X_2)}$.
4. $\log\left\{\frac{P(Y=1|X_1,X_2+1)}{P(Y=0|X_1,X_2+1)}\times\frac{P(Y=0\mid X_1,X_2)}{P(Y=1|X_1,X_2)}\right\}$.

56. *जब अंग आयुकाल स्वतंत्र हैं एवं माध्य 2 के चरघातांकी बंटन हैं, तो दो अंग की एक समांतर प्रणाली की विफलता गति*

1. *अचर है।*
2. *एकदिष्ट एवं परिबद्ध फलन है।*
3. *एकदिष्ट एवं अपरिबद्ध फलन है।*
4. *एकदिष्ट फलन नहीं है।*

56. The failure rate of a parallel system of two components, where the component lifetimes are independent and have the exponential distribution with mean 2, is

1. a constant.
2. a monotone and bounded function.
3. a monotone and unbounded function.
4. a non-monotone function.

57. *रैखिक निदर्श*

$$y_1=\theta_1+2\theta_2-2\theta_3+\varepsilon_1$$

$$y_2=\theta_1+3\theta_2-\theta_3+\varepsilon_2$$

$$y_3=\theta_2+\theta_3+\varepsilon_3,$$

जहां y_i प्रेक्षण, θ_i प्राचल एवं ε_i, $i=1, 2, 3$ के लिए माध्य शून्य व अचर प्रसरण के असहसंबंधित यादृच्छिक चर हैं। तो निम्न में से क्या सही है?

1. $2y_1-y_2-y_3$, $\theta_1-4\,\theta_3$ *का अनभिनत आकल है।*
2. $2y_1-y_2-y_3$, $\theta_1-4\,\theta_3$ *का श्रेष्ठतम रैखिक अनभिनत आकल है।*
3. y_2-3y_3, of $\theta_1-4\,\theta_3$ *का श्रेष्ठतम रैखिक अनभिनत आकल है।*
4. y_1-4y_3, $\theta_1-4\,\theta_3$ *का अनभिनत आकल है।*

57. Consider the linear model

$$y_1 = \theta_1 + 2\theta_2 - 2\theta_3 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \theta_1 + 3\theta_2 - \theta_3 + \varepsilon_2$$

$$y_3 = \theta_2 + \theta_3 + \varepsilon_3,$$

where y_i are observations, θ_i are parameters and ε_i are uncorrelated random variables with mean zero and constant variance for i=1, 2, 3. Then which of the following is true?

1. $2y_1 - y_2 - y_3$ is an unbiased estimator of $\theta_1 - 4\,\theta_3$.
2. $2y_1 - y_2 - y_3$ is the BLUE of $\theta_1 - 4\,\theta_3$.
3. $y_2 - 3y_3$ is the BLUE of $\theta_1 - 4\,\theta_3$.
4. $y_1 - 4y_3$ is an unbiased estimator of $\theta_1 - 4\,\theta_3$.

58. *6 उपचार* 1, 2,…,6 *व* 4 *खंड* {1,2,2}, {2,3,3}, {3,4,4} *एवं* {5,6,6} *की एक अभिकल्पना पर विचारें। निम्न में से क्या सही है?*

1. *अभिकल्पना लांबिक एवं सभी उपचार विषमताएं आकलनीय हैं।*
2. *अभिकल्पना अस्वतंत्र एवं सभी उपचार विषमताएं आकलनीय हैं।*
3. *अभिकल्पना लांबिक एवं सभी उपचार विषमताएं आकलनीय नहीं हैं।*
4. *अभिकल्पना अस्वतंत्र एवं सभी उपचार विषमताएं आकलनीय नहीं हैं।*

58. Consider the following design with 6 treatments 1, 2,…,6 and 4 blocks as follows: {1,2,2}, {2,3,3}, {3,4,4} and {5,6,6}. Which of the following is true?

1. The design is orthogonal and all treatment contrasts are estimable.
2. The design is non-orthogonal and all treatment contrasts are estimable.
3. The design is orthogonal and not all treatment contrasts are estimable.
4. The design is non-orthogonal and not all treatment contrasts are estimable.

59. 50 *इकाइयों* {1,2,…,50} *की एक समष्टि पर विचारें एवं मानें कि* 50 *संभव नमूने* {1}, {1,2}, {1,2,3}, {1,2,3,4}, …, {1,2,3,…,50} *इस प्रकार सूचीकृत किए गए हैं। इनमें से एक नमूने का यादृच्छिक रूप से चयन किया जाता है। मानें कि इकाई* i *चुने गए नमूने में उपस्थित है, इसकी प्रायिकता* π_i *है तो निम्न में से आवश्य क्या सही है?*

1. *अपेक्षित नमूने का आमाप* 25 *है।*
2. *अपेक्षित नमूने का आमाप* 25.5 *है।*
3. $\sum_{i=1}^{50} \pi_i = 1$.
4. $\sum_{i=1}^{50} \pi_i = 25$.

59. Consider a population of 50 units {1,2,...,50} and suppose that 50 possible samples are listed as : {1}, {1,2}, {1,2,3}, {1,2,3,4}, ..., {1,2,3,...,50}. One of these samples is chosen at random. Let π_i be the probability that unit i is in the selected sample. Then which of the following is necessarily true?

1. The expected sample size is 25.
2. The expected sample size is 25.5.
3. $\sum_{i=1}^{50} \pi_i = 1$.
4. $\sum_{i=1}^{50} \pi_i = 25$.

60. एक कतार में नर गति λ_1 के एक प्वासों प्रक्रिया से आते हैं एवं उसी कतार में नारियां एक दूसरी प्वासों प्रक्रिया, जिसकी गति λ_2 है, से आती हैं। नर व नारियों का आगमन स्वतंत्र है। कतार में सर्वप्रथम आने वाले व्यक्ति के नर होने की प्रायिकता है:

1. $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.
2. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.
3. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.
4. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

60. Men arrive in a queue according to a Poisson process with rate λ_1 and women arrive in the same queue according to another Poisson process with rate λ_2. The arrivals of men and women are independent. The probability that the first arrival in the queue is a man is

1. $\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}$.
2. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}$.
3. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.
4. $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

भाग /PART C

एकक /Unit - I

61. मानें कि $\{f_n\}$, $[0,\infty)$ पर परिभाषित संतत वास्तविक–मान फलनों का एक अनुक्रम है। सभी $x \in [0,\infty)$ के लिए मानें कि $f_n(x) \to f(x)$ एवं f समाकलनीय है। तो

1. $\int_0^\infty f_n(x)\,dx \to \int_0^\infty f(x)\,dx$ as $n \to \infty$.
2. यदि $[0,\infty)$ पर एकसमानतः $f_n \to f$ है, तो $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$.
3. यदि $[0,\infty)$ पर एकसमानतः $f_n \to f$ है, तो $\int_0^\infty f_n(x)\,dx \to \int_0^\infty f(x)\,dx$.
4. यदि $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0$, तो [0, 1] पर एकसमानतः $f_n \to f$ है।

61. Let $\{f_n\}$ be a sequence of continuous real-valued functions defined on $[0,\infty)$. Suppose $f_n(x) \to f(x)$ for all $x \in [0,\infty)$ and that f is integrable. Then

1. $\int_0^\infty f_n(x)\,dx \to \int_0^\infty f(x)\,dx$ as $n \to \infty$.
2. if $f_n \to f$ uniformly on $[0,\infty)$, then $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx$.
3. if $f_n \to f$ uniformly on $[0,\infty)$, then $\int_0^\infty f_n(x)\,dx \to \int_0^\infty f(x)\,dx$.
4. if $\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx \to 0$, then $f_n \to f$ uniformly on [0, 1].

62. मानें कि X एक सुसंहत सांस्थितिक समष्टि है एवं $f: X \to \mathbb{R}$ एक फलन है। f का रेखाचित्र समुच्चय $G = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times \mathbb{R}$ है। निम्न में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. G एक संवृत समुच्चय तभी है, जभी, केवल जभी, f संतत है।
2. यदि f संतत है, तो G संवृत है।
3. यदि f संतत है, तो G संबद्ध है।
4. यदि f एक परिबद्ध संतत फलन है, तो G सुसंहत है।

62. Let X be a compact topological space and let $f: X \to \mathbb{R}$ be a function. The graph of f is the set $G = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times \mathbb{R}$. Which of the following are necessarily true?

1. G is a closed set if and only if f is continuous.
2. If f is continuous, then G is closed.
3. If f is continuous, then G is connected.
4. If f is a bounded continuous function, then G is compact.

63. मानें कि $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक अवकलनीय फलन है। तो निम्न कथनों में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. यदि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f'(x) \le r < 1$ है, तो f का कम–से–कम एक नियत बिन्दु है।
2. यदि f का एक अद्वितीय नियत बिन्दु है, तो सभी के $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f'(x) \le r < 1$ है।
3. यदि f का एक अद्वितीय नियत बिन्दु है, तो सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f'(x) \ge r > -1$ है।
4. यदि सभी $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f'(x) \le r < 1$ है, तो f का एक अद्वितीय नियत बिन्दु है।

63. Suppose $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a differentiable function. Then which of the following statements are necessarily true?

1. If $f'(x) \le r < 1$ for all $x \in \mathbb{R}$, then f has at least one fixed point.
2. If f has a unique fixed point, then $f'(x) \le r < 1$ for all $x \in \mathbb{R}$.
3. If f has a unique fixed point, then $f'(x) \ge r > -1$ for all $x \in \mathbb{R}$.
4. If $f'(x) \le r < 1$ for all $x \in \mathbb{R}$, then f has a unique fixed point.

64. निम्न प्रतिबंधों में से क्या–क्या संकेत करते हैं कि फलन $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ आवश्यकतः परिबद्ध विचरण का है?

1. [0, 1] पर f एक एकदिष्ट फलन है।
2. [0, 1] पर f एक संतत एवं एकदिष्ट फलन है।
3. हर $x \in (0,1)$ पर f का एक अवकलज है।
4. अंतराल (0, 1) में f का एक परिबद्ध अवकलज है।

64. Which of the conditions below imply that a function $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ is necessarily of bounded variation?

1. f is a monotone function on [0, 1].
2. f is a continuous and monotone function on [0, 1].
3. f has a derivative at each $x \in (0,1)$.
4. f has a bounded derivative on the interval (0, 1).

65. मानें कि $x \in \mathbb{R}$ के लिए $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ एवं $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}$ हैं। निम्न कथनों में से कौन–से सही हैं?

1. सभी $x > 0$ के लिए $f(x) \ge 0$ है।
2. $[0,\infty)$ पर g एक वर्धमान फलन है।
3. $[0,\infty)$ पर g एक ह्रासमान फलन है।
4. $[0,\infty)$ पर f एक ह्रासमान फलन है।

65. Let $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3!}$ and $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}$ for $x \in \mathbb{R}$. Which of the following statements are correct?

1. $f(x) \ge 0$ for all $x > 0$.
2. g is an increasing function on $[0,\infty)$.
3. g is a decreasing function on $[0,\infty)$.
4. f is a decreasing function on $[0,\infty)$.

66. जहां $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 1\right\}$ एवं $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-2)^2 + (y-2)^2 < \frac{1}{2}\right\}$ हैं, मानें कि $f: A \cup E \to \mathbb{R}^2$ अवकलनीय है। मानें कि Df फलन f का अवकलज है। निम्न में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. यदि सभी $(x,y)\in A\cup E$ के लिए $(Df)(x,y)=0$ है, तो f अचर है।
2. यदि सभी $(x,y)\in A$ के लिए $(Df)(x,y)=0$ है, तो A पर f अचर है।
3. यदि सभी $(x,y)\in E$ के लिए $(Df)(x,y)=0$ है, तो E पर f अचर है।
4. यदि सभी $(x,y)\in A\cup E$ के लिए $(Df)(x,y)=0$ है, तो कुछ $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in \mathbb{R}^2$ के लिए, सभी $(x,y)\in A$ के लिए $f(x,y)=(x_0,y_0)$ एवं सभी $(x,y)\in E$ के लिए $f(x,y)=(x_1,y_1)$ हैं।

66. Let $f:A\cup E\to\mathbb{R}^2$ be differentiable, where $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{2}<x^2+y^2<1\right\}$ and $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-2)^2+(y-2)^2<\frac{1}{2}\right\}$. Let Df be the derivative of the function f. Which of the following are necessarily correct?

1. If $(Df)(x,y)=0$ for all $(x,y)\in A\cup E$, then f is constant.
2. If $(Df)(x,y)=0$ for all $(x,y)\in A$, then f is constant on A.
3. If $(Df)(x,y)=0$ for all $(x,y)\in E$, then f is constant on E.
4. If $(Df)(x,y)=0$ for all $(x,y)\in A\cup E$, then, for some $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(x_0,y_0)$ for all $(x,y)\in A$ and $f(x,y)=(x_1,y_1)$ for all $(x,y)\in E$.

67. मानें कि $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ फलन $L(x)=\langle x,y\rangle$, है जहां $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\mathbb{R}^n$ पर कोई आंतर गुणनफल है एवं $\mathbb{R}^n$ पर y एक नियत सदिश है। आगे, L के अवकलज को DL से निर्दिष्ट करें। निम्न में से कौन–से आवश्यकत: सही हैं?

1. सभी $u,\ v\in\mathbb{R}^n$ के लिए $DL(u)=DL(v)$ है।
2. $DL(0,0,\cdots,0)=L$ है।
3. सभी $x\in\mathbb{R}^n$ के लिए $DL(x)=\|x\|^2$ है।
4. $DL(1,1,\cdots,1)=0$ है।

67. Let $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ be the function $L(x)=\langle x,y\rangle$, where $\langle\cdot,\cdot\rangle$ is some inner product on $\mathbb{R}^n$ and y is a fixed vector in $\mathbb{R}^n$. Further denote by DL, the derivative of L. Which of the following are necessarily correct?

1. $DL(u)=DL(v)$ for all $u,\ v\in\mathbb{R}^n$.
2. $DL(0,0,\cdots,0)=L$.
3. $DL(x)=\|x\|^2$ for all $x\in\mathbb{R}^n$.
4. $DL(1,1,\cdots,1)=0$.

68. मानें कि $f:[\pi,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ फलन $f(t)=(\cos t,\ \sin t)$ है। निम्न में से कौन–से आवश्यकत: सही हैं?

1. $t_0\in[\pi,2\pi]$ का अस्तित्व है ताकि $f'(t_0)=\frac{1}{\pi}\left(f(2\pi)-f(\pi)\right)$ हो।
2. ऐसा कोई $t_0\in[\pi,2\pi]$ का अस्तित्व नहीं है, ताकि $f'(t_0)=\frac{1}{\pi}\left(f(2\pi)-f(\pi)\right)$ हो।

3. $t_0 \in [\pi, 2\pi]$ का अस्तित्व है, ताकि $\| f(2\pi) - f(\pi) \| \le \pi \| f'(t_0) \|$ हो।

4. सभी $t \in [\pi, 2\pi]$ के लिए $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ है।

68. Let $f:[\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ be the function $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Which of the following are necessarily correct?

1. There exists $t_0 \in [\pi, 2\pi]$ such that $f'(t_0) = \frac{1}{\pi}(f(2\pi) - f(\pi))$.
2. There does not exist any $t_0 \in [\pi, 2\pi]$ such that $f'(t_0) = \frac{1}{\pi}(f(2\pi) - f(\pi))$
3. There exists $t_0 \in [\pi, 2\pi]$ such that $\| f(2\pi) - f(\pi) \| \le \pi \| f'(t_0) \|$.
4. $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$ for all $t \in [\pi, 2\pi]$.

69. मानें कि $X = [-1,1] \times [-1,1]$, $A = \{(x,y) \in X : x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x,y) \in X : |x| + |y| = 1\}$, $C = \{(x,y) \in X : xy = 0\}$ एवं $D = \{(x,y) \in X : x = \pm y\}$ हैं। तो

1. A, B के तद्वत है।
2. B, C के तद्वत है।
3. C, D के तद्वत है।
4. D, A के तद्वत है।

69. Let $X = [-1,1] \times [-1,1]$, $A = \{(x,y) \in X : x^2 + y^2 = 1\}$, $B = \{(x,y) \in X : |x| + |y| = 1\}$, $C = \{(x,y) \in X : xy = 0\}$ and $D = \{(x,y) \in X : x = \pm y\}$. Then

1. A is homeomorphic to B.
2. B is homeomorphic to C.
3. C is homeomorphic to D.
4. D is homeomorphic to A.

70. मानें कि $n \ge 3$ एक पूर्णांक है एवं $\mathbb{R}$ पर स्थित एक सदिश समष्टि के $u_1, u_2, \ldots, u_n$ n एकघाततः स्वतंत्र अवयव हैं। ठहरायें कि $u_0 = 0$ तथा $u_{n+1} = u_1$ परिभाषित करें कि सभी $i = 1, 2, \cdots, n$ के लिए $v_i = u_i + u_{i+1}$ एवं $w_i = u_{i-1} + u_i$ हैं। तो

1. यदि $n = 2010$, तो $v_1, v_2, \cdots, v_n$ एकघाततः स्वतंत्र हैं।
2. यदि $n = 2011$, तो $v_1, v_2, \cdots, v_n$ एकघाततः स्वतंत्र हैं।
3. यदि $n = 2010$, तो $w_1, w_2, \cdots, w_n$ एकघाततः स्वतंत्र हैं।
4. यदि $n = 2011$, तो $w_1, w_2, \cdots, w_n$ एकघाततः स्वतंत्र हैं।

70. Let n be an integer, $n \geq 3$, and let $u_1, u_2, \ldots, u_n$ be n linearly independent elements in a vector space over $\mathbb{R}$. Set $u_0 = 0$ and $u_{n+1} = u_1$. Define $v_i = u_i + u_{i+1}$ and $w_i = u_{i-1} + u_i$ for $i = 1, 2, \cdots, n$. Then

1. $v_1, v_2, \cdots, v_n$ are linearly independent, if $n = 2010$.
2. $v_1, v_2, \cdots, v_n$ are linearly independent, if $n = 2011$.
3. $w_1, w_2, \cdots, w_n$ are linearly independent, if $n = 2010$.
4. $w_1, w_2, \cdots, w_n$ are linearly independent, if $n = 2011$.

71. मानें कि V एवं W $\mathbb{R}$ पर सीमित–विमीय सदिश समष्टियां हैं। मानें कि $T_1: V \to V$ एवं $T_2: W \to W$ रैखिक रूपान्तरण हैं जिनके अल्पिष्ठ बहुपद इस प्रकार दिए गए हैं :

$$f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \text{ एवं } f_2(x) = x^4 - x^2 - 2.$$

मानें कि $T: V \oplus W \to V \oplus W$ एक रैखिक रूपान्तरण है जो सभी $(v, w) \in V \oplus W$ के लिए

$T(v, w) = (T_1(v), T_2(w))$ से परिभाषित है। मानें कि $f(x)$, T का अल्पिष्ठ बहुपद है। तो

1. घात $f(x) = 7$.
2. घात $f(x) = 5$.
3. शून्यता $(T) = 1$.
4. शून्यता $(T) = 0$.

71. Let V and W be finite-dimensional vector spaces over $\mathbb{R}$ and let $T_1: V \to V$ and $T_2: W \to W$ be linear transformations whose minimal polynomials are given by

$$f_1(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad \text{and} \quad f_2(x) = x^4 - x^2 - 2.$$

Let $T: V \oplus W \to V \oplus W$ be the linear transformation defined by

$$T(v, w) = (T_1(v), T_2(w)) \quad \text{for } (v, w) \in V \oplus W$$

and let $f(x)$ be the minimal polynomial of T. Then

1. $\deg f(x) = 7$.
2. $\deg f(x) = 5$.
3. nullity $(T) = 1$.
4. nullity $(T) = 0$.

72. मानें कि $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ हैं एवं मानें कि $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ एक रैखिक रूपान्तरण है जो

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ के लिए, } T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \text{ से परिभाषित है।}$$

मानें कि $S: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ संगत प्रतिचित्र है जो सभी $x, y \in \mathbb{R}$ के लिए

$$S(x+iy)=(ax+by)+i(cx+dy) \text{ से परिभाषित है।}$$

तो

1. S हमेशा $\mathbb{C}$-रैखिक है, अर्थात् सभी $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ के लिए $S(z_1+z_2)=S(z_1)+S(z_2)$ एवं सभी $\alpha \in \mathbb{C}$ और $z \in \mathbb{C}$ के लिए $S(\alpha z)=\alpha S(z)$ है।
2. यदि $b=-c$ एवं $d=a$ हैं तो S, $\mathbb{C}$-रैखिक है।
3. केवल यदि $b=-c$ एवं $d=a$ हैं तो ही S, $\mathbb{C}$-रैखिक है।
4. यदि, एवं केवल यदि, T तत्समक रूपान्तरण है, तो ही S, $\mathbb{C}$-रैखिक है।

72. Let $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ and let $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be the linear transformation defined by

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix} \quad \text{for } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

Let $S:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be the corresponding map defined by

$$S(x+iy)=(ax+by)+i(cx+dy) \quad \text{for } x,y \in \mathbb{R}.$$

Then

1. S is always $\mathbb{C}$-linear, that is $S(z_1+z_2)=S(z_1)+S(z_2)$ for all $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ and $S(\alpha z)=\alpha S(z)$ for all $\alpha \in \mathbb{C}$ and $z \in \mathbb{C}$.
2. S is $\mathbb{C}$-linear if $b=-c$ and $d=a$.
3. S is $\mathbb{C}$-linear only if $b=-c$ and $d=a$.
4. S is $\mathbb{C}$-linear if and only if T is the identity transformation.

73. मानें कि $A=(a_{ij})$ एक $n \times n$ सम्मिश्र आव्यूह है एवं A के संयुग्मी परिवर्त को A^* से निर्दिष्ट किया जाता है। निम्न कथनों में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. यदि A व्युत्क्रमणीय है, तो अनुरेख $(A^*A) \neq 0$, अर्थात् A^*A का अनुरेख शून्येतर है।
2. यदि अनुरेख $(A^*A) \neq 0$ है, तो A व्युत्क्रमणीय है।
3. यदि | अनुरेख (A^*A) | $< n^2$, तो कुछ i, j के लिए $|a_{ij}| < 1$ है।
4. यदि अनुरेख $(A^*A) = 0$ है, तो A शून्य आव्यूह है।

73. Let $A=(a_{ij})$ be an $n \times n$ complex matrix and let A^* denote the conjugate transpose of A. Which of the following statements are necessarily true?

1. If A is invertible, then $\mathrm{tr}(A^*A) \neq 0$, i.e., the trace of A^*A is nonzero.
2. If $\mathrm{tr}(A^*A) \neq 0$, then A is invertible.
3. If $|\mathrm{tr}(A^*A)| < n^2$, then $|a_{ij}| < 1$ for some i, j.
4. If $\mathrm{tr}(A^*A) = 0$, then A is the zero matrix.

74. मानें कि n एक धनात्मक पूर्णांक है, एवं V, $\mathbb{R}$ पर एक $(n+1)$ – विमीय सदिश समष्टि है। यदि $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ V का आधार है एवं $T: V \to V$ एक रैखिक रूपान्तरण है जो $1, 2, \ldots, n$ के लिए

$T(e_i) = e_{i+1}$ और $T(e_{n+1}) = 0$

का समाधान करता है। तो

1. T का अनुरेख शून्येतर है।
2. T की जाति n है।
3. T की शून्यता 1 है।
4. $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n बार) शून्य प्रतिचित्र है।

74. Let n be a positive integer and V be an $(n+1)$ - dimensional vector space over $\mathbb{R}$. If $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$ is a basis of V and $T: V \to V$ is the linear transformation satisfying

$T(e_i) = e_{i+1}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ and $T(e_{n+1}) = 0$.

Then

1. trace of T is nonzero.
2. rank of T is n.
3. nullity of T is 1.
4. $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n times) is the zero map.

75. मानें कि A एवं B $n \times n$ वास्तविक आव्यूह हैं, ताकि $AB = BA = 0$ एवं $A+B$ व्युत्क्रमणीय है। निम्न में से कौन–से हमेशा सच हैं?

1. जाति (A) = जाति(B) है।
2. जाति (A) + जाति $(B) = n$ है।
3. शून्यता (A) + शून्यता $(B) = n$ है।
4. $A-B$ व्युत्क्रमणीय है।

75. Let A and B be $n \times n$ real matrices such that $AB = BA = 0$ and $A+B$ is invertible. Which of the following are always true?

1. rank (A) = rank (B).
2. rank (A) + rank $(B) = n$.
3. nullity (A) + nullity $(B) = n$.
4. $A-B$ is invertible.

76. मानें कि n, ≥ 2 एक पूर्णांक है एवं $M_n(\mathbb{R})$, $n \times n$ वास्तविक आव्यूहों की सदिश समष्टि का निर्दिष्ट करता है। मानें कि $B \in M_n(\mathbb{R})$ एक लांबिक आव्यूह है एवं B^t, B के परिवर्त का निर्दिष्ट करता है। $W_B = \{B^t AB : A \in M_n(\mathbb{R})\}$ पर विचारें। निम्न में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. W_B, $M_n(\mathbb{R})$ की उपसमष्टि है एवं विमा $W_B \leq$ जाति(B) है।
2. W_B, $M_n(\mathbb{R})$ की उपसमष्टि है एवं विमा W_B = जाति(B) जाति(B^t) है।
3. $W_B = M_n(\mathbb{R})$.
4. W_B, $M_n(\mathbb{R})$ की एक उपसमष्टि नहीं है।

76. Let n be an integer ≥ 2 and let $M_n(\mathbb{R})$ denote the vector space of $n \times n$ real matrices. Let $B \in M_n(\mathbb{R})$ be an orthogonal matrix and let B^t denote the transpose of B. Consider $W_B = \{B^t AB : A \in M_n(\mathbb{R})\}$. Which of the following are necessarily true?

1. W_B is a subspace of $M_n(\mathbb{R})$ and dim $W_B \leq$ rank (B).
2. W_B is a subspace of $M_n(\mathbb{R})$ and dim W_B = rank (B) rank (B^t).
3. $W_B = M_n(\mathbb{R})$.
4. W_B is not a subspace of $M_n(\mathbb{R})$.

77. मानें कि A एक 5×5, $\mathbb{R}$ में प्रविष्टियों के साथ का, विषम–सममित आव्यूह है एवं B एक दूसरा 5×5 आव्यूह सममित है जिसकी $(i, j)^{th}$ वाली प्रविष्टि $1 \leq i \leq j \leq 5$ के लिये द्विपद गुणांक $\binom{i}{j}$ है। 10×10 आव्यूह पर विचारें जो खंड रूप में दिया गया है : $C = \begin{pmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{pmatrix}$ । तो

1. सारणिक $C = 1$ या -1 है ।
2. सारिणक $C = 0$ है ।
3. C का अनुरेख 0 है ।
4. C का अनुरेख 5 है ।

77. Let A be a 5×5 skew-symmetric matrix with entries in $\mathbb{R}$ and B be the 5×5 symmetric matrix whose $(i, j)^{th}$ entry is the binomial coefficient $\binom{i}{j}$ for $1 \leq i \leq j \leq 5$. Consider the 10×10 matrix, given in block form by

$$C = \begin{pmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Then

1. det $C = 1$ or -1.
2. det $C = 0$.
3. trace of C is 0.
4. trace of C is 5.

78. मानें कि A एक 3×3 सममित आव्यूह है ताकि $[x, y, 1] A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = xy - 1$ है । मानें कि A के धनात्मक अभिलाक्षणिक मानों कि संख्या p है एवं $q =$ जाति $(A) - p$ है । तो

1. $p = 1$
2. $p = 2$
3. $q = 2$
4. $q = 1$

78. Suppose A is a 3 × 3 symmetric matrix such that

$$[x,y,1]A\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=xy-1.$$

Let p be the number of positive eigenvalues of A and let $q = \text{rank}(A) - p$. Then

1. $p = 1$.
2. $p = 2$.
3. $q = 2$.
4. $q = 1$.

एकक /Unit - II

79. *निम्न फलनों f में से कौन–से सर्वत्र वैश्लेषिक फलन हैं और सभी $n \in \mathbb{Z}$ के लिये $z = ik$ पर साधारण शून्यक होते हैं?*

1. $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ कुछ के लिये $n \geq 1$, एवं कुछ $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$.
2. कुछ $a \in \mathbb{C}$ के लिये $f(z) = a \sin 2\pi i z$ है ।
3. कुछ $b \in \mathbb{C}$ के लिये $f(z) = b \cos 2\pi (iz - 1/4)$ है ।
4. कुछ $c \in \mathbb{C}$ के लिये $f(z) = e^{cz}$ है ।

79. Which of the following functions f are entire functions and have simple zeros at $z = ik$ for all $k \in \mathbb{Z}$.

1. $f(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ for some $n \geq 1$ and some $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{C}$.
2. $f(z) = a \sin 2\pi i z$, for some $a \in \mathbb{C}$.
3. $f(z) = b \cos 2\pi (iz - 1/4)$, for some $b \in \mathbb{C}$.
4. $f(z) = e^{cz}$, for some $c \in \mathbb{C}$.

80. *$k = 1,2,3$ के लिये मानें कि $\gamma_k = \{ke^{ik\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ है। निम्न में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं ?*

1. $k = 1,2,3$ के लिये $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{1}{z}dz = 0$ है ।
2. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz = 1$.
3. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz = 4$.
4. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{1}{z}dz = 3$.

80. Let $\gamma_k = \{ke^{ik\theta} : 0 \le \theta \le 2\pi\}$ for $k = 1,2,3$. Which of the following are necessarily correct?

1. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k}\frac{1}{z}dz = 0$ for $k = 1,2,3$.
2. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{1}{z}dz = 1$.
3. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{1}{z}dz = 4$.
4. $\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3}\frac{1}{z}dz = 3$.

81. $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ पर परिभाषित f एक वैश्लेषिक फलन है ताकि f का परिसर समुच्चय $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ में अंतर्विष्ट है । तो

1. f आवश्यकतः एक अचर फलन है ।
2. $\mathbb{D}$ पर एक वैश्लेषिक फलन g का अस्तित्व है ताकि हर $z \in \mathbb{D}$ के लिये $g(z)$, $f(z)$ का एक वर्गमूल है ।
3. $\mathbb{D}$ पर एक वैश्लेषिक फलन g का अस्तित्व है ताकि वास्तविक $g(z) \ge 0$ एवं हर $z \in \mathbb{D}$ के लिये $g(z)$, $f(z)$ का एक वर्गमूल है ।
4. $\mathbb{D}$ पर एक वैश्लेषिक फलन g का अस्तित्व है ताकि वास्तविक $g(z) \le 0$ एवं हर $z \in \mathbb{D}$ के लिये $g(z)$, $f(z)$ का एक वर्गमूल है ।

81. Let f be an analytic function defined on $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ such that the range of f is contained in the set $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Then

1. f is necessarily a constant function.
2. there exists an analytic function g on $\mathbb{D}$ such that $g(z)$ is a square root of $f(z)$ for each $z \in \mathbb{D}$.
3. there exists an analytic function g on $\mathbb{D}$ such that Re $g(z) \ge 0$ and $g(z)$ is a square root of $f(z)$ for each $z \in \mathbb{D}$.
4. there exists an analytic function g on $\mathbb{D}$ such that Re $g(z) \le 0$ and $g(z)$ is a square root of $f(z)$ for each $z \in \mathbb{D}$.

82. विवृत समुच्चय $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ पर मानें कि $f : \Omega \to \mathbb{C}$ एक वैश्लेषिक फलन है । मानें कि $r > 0$ के लिये $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ है एवं मानें कि $\overline{\mathbb{D}_r}$ उसका संवरक है। निम्न में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. यदि $\overline{\mathbb{D}_1} \subset f(\Omega)$ है, तो कुछ $r > 1$ के लिये $\mathbb{D}_r \subset f(\Omega)$ है।
2. यदि $\overline{\mathbb{D}_1} \subset f(\Omega)$ है, तो कुछ $r > 1$ के लिये $\mathbb{D}_r = f(\Omega)$
3. यदि $\overline{\mathbb{D}_1} \subset f(\Omega)$ है, तो कुछ $r > 1$ के लिये $\overline{\mathbb{D}_r} \subset f(\Omega)$
4. $f(\Omega)$ विवृत है।

82. Let $f: \Omega \to \mathbb{C}$ be an analytic function on an open set $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. For $r > 0$, let $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ and let $\overline{\mathbb{D}_r}$ be its closure. Which of the following are necessarily true?

1. If $\overline{\mathbb{D}_1} \subset f(\Omega)$, then $\mathbb{D}_r \subset f(\Omega)$ for some $r > 1$.
2. If $\overline{\mathbb{D}_1} \subset f(\Omega)$, then $\mathbb{D}_r = f(\Omega)$ for some $r > 1$.
3. If $\overline{\mathbb{D}_1} \subset f(\Omega)$, then $\overline{\mathbb{D}_r} \subset f(\Omega)$ for some $r > 1$.
4. $f(\Omega)$ is open.

83. मानें कि $z \in \mathbb{C}$ के लिये, $z \neq 0$ के साथ, $f(z) = z + \frac{1}{z}$ है। निम्न में से कौनसे हमेशा सही हैं?

1. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ पर f एक वैश्लेषिक फलन है।
2. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ पर f एक अनुकोण प्रतिचित्र है।
3. f एकांक वृत्त को वास्तविक अक्ष के एक उपसमुच्चय पर प्रतिचित्रित करता है।
4. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ पर स्थित किसी भी वृत्त का बिम्ब पुनः एक वृत्त है ।

83. Let $f(z) = z + \frac{1}{z}$ for $z \in \mathbb{C}$ with $z \neq 0$. Which of the following are always true?

1. f is an analytic function on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
2. f is a conformal map on $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
3. f maps the unit circle to a subset of the real axis.
4. The image of any circle in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ is again a circle.

84. एक धनात्मक पूर्णांक m के लिये मानें कि $\varphi(m)$ पूर्णांकों की संख्या का निर्दिष्ट करता है ताकि $1 \leq k \leq m$ एवं महत्तम सामान्य भाजक $(k, m)=1$ है। तो निम्न कथनों में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. हर धनात्मक पूर्णांक n के लिये $\varphi(n)$, n का विभाजन करता है ।
2. सभी धनात्मक पूर्णांक a व n के लिये $\varphi(a^n - 1)$ को n विभाजित करता है ।
3. सभी धनात्मक पूर्णांक a व n के लिये, $\varphi(a^n - 1)$ को n विभाजित करता है तकि महत्तम सामान्य भाजक $(a, n)=1$ हो।
4. सभी धनात्मक पूर्णांक a व n के लिये $\varphi(a^n - 1)$ को a विभाजित करता है ताकि महत्तम सामान्य भाजक $(a, n)=1$ हो।

84. For a positive integer m, let $\varphi(m)$ denote the number of integers k such that $1 \leq k \leq m$ and GCD$(k, m)=1$. Then which of the following statements are necessarily true?

1. $\varphi(n)$ divides n for every positive integer n.
2. n divides $\varphi(a^n - 1)$ for all positive integers a and n.

3. n divides $\varphi(a^n - 1)$ for all positive integers a and n such that GCD(a, n)=1.

4. a divides $\varphi(a^n - 1)$ for all positive integers a and n such that GCD(a, n)=1.

85. एक धनात्मक पूर्णांक $n \geq 4$ एवं एक अभाज्य अंक $p \leq n$ के लिये मानें कि $U_{p,n}$, n अक्षरों पर के एकान्तर समूह A_n के सभी p-सैलो उपसमुच्चयों के सम्मिलन का निर्दिष्ट करता है और मानें कि $K_{p,n}$, $U_{p,n}$ से निर्मित A_n के उपसमुच्चय का निर्दिष्ट करता है । मानें कि $|K_{p,n}|$, $K_{p,n}$ की कोटि का निर्दिष्ट करता है। तो

1. $|K_{2,4}| = 12$. 2. $|K_{2,4}| = 4$. 3. $|K_{2,5}| = 60$. 4. $|K_{3,5}| = 30$.

85. For a positive integer $n \geq 4$ and a prime number $p \leq n$, let $U_{p,n}$ denote the union of all p-Sylow subgroups of the alternating group A_n on n letters. Also let $K_{p,n}$ denote the subgroup of A_n generated by $U_{p,n}$, and let $|K_{p,n}|$ denote the order of $K_{p,n}$. Then

1. $|K_{2,4}| = 12$. 2. $|K_{2,4}| = 4$. 3. $|K_{2,5}| = 60$. 4. $|K_{3,5}| = 30$.

86. मानें कि धनात्मक पूर्णांक n के लिये, $f_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$ है । तो

1. हर धनात्मक पूर्णांक n के लिये $\mathbb{Q}[x]$ में $f_n(x)$ एक अलघुकरणीय बहुपद है ।
2. हर अभाज्य अंक p के लिये $\mathbb{Q}[x]$ में $f_p(x)$ एक अलघुकरणीय बहुपद है ।
3. हर अभाज्य अंक p एवं हर धनात्मक पूर्णांक e के लिये $\mathbb{Q}[x]$ में $f_{p^e}(x)$ एक अलघुकरणीय बहुपद है ।
4. हर अभाज्य अंक p एवं हर धनात्मक पूर्णांक e के लिये $\mathbb{Q}[x]$ में $f_p\left(x^{p^{e-1}}\right)$ एक अलघुकरणीय बहुपद है ।

86. For a positive integer n, let $f_n(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$. Then

1. $f_n(x)$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{Q}[x]$ for every positive integer n.
2. $f_p(x)$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{Q}[x]$ for every prime number p.
3. $f_{p^e}(x)$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{Q}[x]$ for every prime number p and every positive integer e.
4. $f_p\left(x^{p^{e-1}}\right)$ is an irreducible polynomial in $\mathbb{Q}[x]$ for every prime number p and every positive integer e.

87. वलय $R=\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]=\left\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ एवं R का अवयव $\alpha=3+\sqrt{-5}$ पर विचारें । तो

1. α अभाज्य है।
2. α अलघुकरणीय है।
3. R एक अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत नहीं है।
4. R एक पूर्णांकीय प्रांत नहीं है।

87. Consider the ring $R=\mathbb{Z}\left[\sqrt{-5}\right]=\left\{a+b\sqrt{-5}:a,b\in\mathbb{Z}\right\}$ and the element $\alpha=3+\sqrt{-5}$ of R. Then

1. α is prime.
2. α is irreducible.
3. R is not a unique factorization domain.
4. R is not an integral domain.

88. बहुपद $f(x)=x^4-x^3+14x^2+5x+16$ पर विचारें। और एक अभाज्य अंक p के लिये मानें कि $\mathbb{F}_p$, p अवयव वाले एक क्षेत्र का निर्दिष्ट करता है। निम्न में से कौन से हमेशा सही हैं?

1. f को $\mathbb{F}_3$ में गुणांकों के साथ एक बहुपद मानते हुये, उसके $\mathbb{F}_3$ में कोई मूल नहीं है।
2. f को $\mathbb{F}_3$ में गुणांकों के साथ एक बहुपद मानते हुए, वह $\mathbb{F}_3$ पर दो द्विघाती गुणनखंडों का गुणनफल है।
3. f को $\mathbb{F}_7$ में गुणांकों के साथ एक बहुपद मानते हुए, उसका $\mathbb{F}_7$ पर एक त्रिघाती अलघुकरणीय गुणखंड है।
4. f, $\mathbb{Z}$ पर दो द्विघाती बहुपदों का गुणनफल है।

88. Consider the polynomial $f(x)=x^4-x^3+14x^2+5x+16$. Also for a prime number p, let $\mathbb{F}_p$ denote the field with p elements. Which of the following are always true?

1. Considering f as a polynomial with coefficients in $\mathbb{F}_3$, it has no roots in $\mathbb{F}_3$.
2. Considering f as a polynomial with coefficients in $\mathbb{F}_3$, it is a product of two irreducible factors of degree 2 over $\mathbb{F}_3$.
3. Considering f as a polynomial with coefficients in $\mathbb{F}_7$, it has an irreducible factor of degree 3 over $\mathbb{F}_7$.
4. f is a product of two polynomials of degree 2 over $\mathbb{Z}$.

89. एक धनात्मक पूर्णांक m के लिये, मानें कि a_m वलय $\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^m-1\rangle}$ के भिन्न अभाज्य गुणजावलियों की संख्या का निर्दिष्ट करता है। तो

1. $a_4=2$.
2. $a_4=3$.
3. $a_5=2$.
4. $a_5=3$.

89. For a positive integer m, let a_m denote the number of distinct prime ideals of the ring $\dfrac{\mathbb{Q}[x]}{\langle x^m - 1\rangle}$.

Then

1. $a_4 = 2$.
2. $a_4 = 3$.
3. $a_5 = 2$.
4. $a_5 = 3$.

90. मानें कि $\mathbb{R}$ पर τ सांस्थितिकी है जिसके लिये अंतराल $[a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$, एक आधार बनते हैं। मानें कि $\mathbb{R}$ पर σ एक सांस्थितिकी है ताकि $\sigma \supseteq \tau$ । तो

1. या तो $\sigma = \tau$,नहीं तो σ विविक्त सांस्थितिकी है।
2. यदि ऊपर से, प्रतिचित्र $x \mapsto -x$, σ के लिये संतत है, तो σ विविक्त सांस्थितिकी है।
3. यदि ऊपर से, प्रतिचित्र $x \mapsto -x$, σ के लिये तद्रत्ता है, तो σ विविक्त सांस्थितिकी है।
4. यदि ऊपर से, प्रतिचित्र $x \mapsto |x|$, σ के लिये तद्रत्ता है, तो σ विविक्त सांस्थितिकी है।

90. Let τ be the topology on $\mathbb{R}$ for which the intervals $[a,b)$, $-\infty < a < b < \infty$, form a base. Let σ be a topology on $\mathbb{R}$ such that $\sigma \supseteq \tau$. Then

1. either $\sigma = \tau$ or σ is the discrete topology.
2. if, moreover, the map $x \mapsto -x$ is continuous for σ, then σ is the discrete topology.
3. if, moreover, the map $x \mapsto -x$ is a homeomorphism for σ, then σ is the discrete topology.
4. if, moreover, the map $x \mapsto |x|$ is a homeomorphism for σ, then σ is the discrete topology.

एकक /Unit - III

91. अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx} = 60(y^2)^{1/5};\quad x > 0$$
$$y(0) = 0$$

1. का एक अद्वितीय हल है।
2. के दो हल हैं।
3. का कोई हल नहीं है।
4. के अनंत संख्या में हल हैं।

91. The differential equation

$$\frac{dy}{dx} = 60(y^2)^{1/5};\quad x > 0$$
$$y(0) = 0$$

has

1. a unique solution.
2. two solutions.
3. no solution.
4. infinite number of solutions.

92. अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x);\quad x\in(0,1)$ $y(0)=y(1)=0$ का हल $y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi$ से दिया जाता है, जहाँ

1. $G(x,\xi)=\begin{cases} x(\xi-1); & x\le\xi \\ \xi(x-1); & x>\xi \end{cases}$.
2. $G(x,\xi)=\begin{cases} x^2(\xi-1); & x\le\xi \\ \xi^2(x-1); & x>\xi \end{cases}$.
3. $G(x,\xi)=\begin{cases} x(\xi^2-1); & x\le\xi \\ \xi(x^2-1); & x>\xi \end{cases}$.
4. $G(x,\xi)=\begin{cases} \sin x(\xi-1); & x\le\xi \\ \sin\xi(x-1); & x>\xi \end{cases}$.

92. The solution of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x);\quad x\in(0,1)$$
$$y(0)=y(1)=0$$

is given by

$$y(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

where

1. $G(x,\xi)=\begin{cases} x(\xi-1); & x\le\xi \\ \xi(x-1); & x>\xi \end{cases}$.
2. $G(x,\xi)=\begin{cases} x^2(\xi-1); & x\le\xi \\ \xi^2(x-1); & x>\xi \end{cases}$.
3. $G(x,\xi)=\begin{cases} x(\xi^2-1); & x\le\xi \\ \xi(x^2-1); & x>\xi \end{cases}$.
4. $G(x,\xi)=\begin{cases} \sin x(\xi-1); & x\le\xi \\ \sin\xi(x-1); & x>\xi \end{cases}$.

93. आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-t}$ का एक परिबद्ध हल है :

1. $u(x,t)=-e^{-t}$.
2. $u(x,t)=e^{-x}e^{-t}$.
3. $u(x,t)=e^{-x}+e^{-t}$.
4. $u(x,t)=x-e^{-t}$.

93. A bounded solution to the partial differential equation

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+e^{-t}$$

is

1. $u(x,t)=-e^{-t}$.
2. $u(x,t)=e^{-x}e^{-t}$.
3. $u(x,t)=e^{-x}+e^{-t}$.
4. $u(x,t)=x-e^{-t}$.

94. *यदि $u(x,t)$ आंशिक अवकल समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ का समाधान करता है तो $u(x,t)$ कौन से रूप में होगा*

1. $u(x,t)=f(e^{x-2t})+g(x+2t)$.
2. $u(x,t)=f(x^2-4t^2)+g(x^2+4t^2)$.
3. $u(x,t)=f(2x-4t)+g(x+2t)$.
4. $u(x,t)=f(2x-t)+g(2x+t)$.

जहां f तथा g अतुच्छ मसृण फलन हैं।

94. If $u(x,t)$ satisfy the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

then $u(x,t)$ can be of the form

1. $u(x,t)=f(e^{x-2t})+g(x+2t)$.
2. $u(x,t)=f(x^2-4t^2)+g(x^2+4t^2)$.
3. $u(x,t)=f(2x-4t)+g(x+2t)$.
4. $u(x,t)=f(2x-t)+g(2x+t)$.

Where f and g are non-trivial smooth functions.

95. *मानें कि f अंतराल [0,1] से उसी पर एक संतत प्रतिचित्र है एवं पुनरावृत्ति $x_{n+1} = f(x_n)$ पर विचारें। निम्न में से कौन–कौन प्रतिचित्र f के लिये एक नियत बिन्दु प्रस्तुत करेंगे?*

1. $f(x)=x^2/4$.
2. $f(x)=x^2/8$.
3. $f(x)=x^2/16$.
4. $f(x)=x^2/32$.

95. Let f be a continuous map from the interval [0,1] into itself and consider the iteration

$x_{n+1} = f(x_n)$.

Which of the following maps will yield a fixed point for f ?

1. $f(x)=x^2/4$.
2. $f(x)=x^2/8$.
3. $f(x)=x^2/16$.
4. $f(x)=x^2/32$.

96. सामान्य अवकल समीकरण $\frac{dy}{dt}=\lambda y;\ t>0,\ y(0)=1$ एवं चरण आमाप h के ऑयलर अधियोजना पर विचारें :

$$\frac{Y_{n+1}-Y_n}{h}=\lambda Y_n;\ n\geq 1$$
$$Y_0=1$$

Y_1, जो $Y(h)=e^{\lambda h}$ को निकटीकृत करता है, के लिये निम्न में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं ?

1. Y_1 एक बहुपदीय सन्निकटीकरण है।
2. Y_1 एक परिमेय फलन सन्निकटीकरण है।
3. Y_1 एक त्रिकोणमितीय फलन सन्निकटीकरण है।
4. Y_1 अनंत श्रेणी का छिन्नकरण है।

96. Consider the ordinary differential equation

$$\frac{dy}{dt}=\lambda y;\ t>0$$
$$y(0)=1,$$

and the Euler scheme with step size h

$$\frac{Y_{n+1}-Y_n}{h}=\lambda Y_n;\ n\geq 1$$
$$Y_0=1$$

Which of the following are necessarily true for Y_1 which approximates $Y(h)=e^{\lambda h}$?

1. Y_1 is a polynomial approximation.
2. Y_1 is a rational function approximation.
3. Y_1 is a trigonometric function approximation.
4. Y_1 is a truncation of infinite series.

97. फलनक $J=\int_a^b F(x,y,y')dx$ पर विचारें जहाँ ग्राह्य फलन $y(x)$ के लिये $F(x,y,y')=(1+y^2)/y'^2$ है।
निम्न में से कौन से J के लिये बाह्य हैं ?

1. $y(x)=A\sin(x)$.
2. $y(x)=A\sinh(x)+B\cosh(x)$.
3. $y(x)=A\sinh(Ax+B)$.
4. $y(x)=A\sin(x)+B\cos(x)$.

97. Consider the functional

$$J=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

where $F(x,y,y')=(1+y^2)/y'^2$

for admissible functions $y(x)$. Which of the following are extremals for J?

1. $y(x) = A\sin(x)$.
2. $y(x) = A\sinh(x) + B\cosh(x)$.
3. $y(x) = A\sinh(Ax + B)$.
4. $y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$.

98. प्रारंभिक मान समस्या

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0;\ x>0;$$
$$y(0)=1,$$
$$y'(0)=0,$$

इस वोलतेरा समाकल समीकरण के तुल्यमान है :

1. $y(x)=1+\int_0^x (t-x)y(t)\,dt$.
2. $y(x)=1+\int_0^x (t+x)y(t)\,dt$.
3. $y(x)=1+\int_0^x xty(t)\,dt$.
4. $y(x)=1+\int_0^x (x-t)y(t)\,dt$.

98. The initial value problem

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0;\ x>0$$
$$y(0)=1,$$
$$y'(0)=0,$$

is equivalent to the Volterra integral equation

1. $y(x)=1+\int_0^x (t-x)y(t)\,dt$.
2. $y(x)=1+\int_0^x (t+x)y(t)\,dt$.
3. $y(x)=1+\int_0^x xty(t)\,dt$.
4. $y(x)=1+\int_0^x (x-t)y(t)\,dt$.

99. समाकल समीकरण $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}cos\left[\pi(x-t)\right]\varphi(t)dt=f(x)$

1. का, जब $f(x)=x$ है, $\lambda\neq1$ के लिये एक अनन्य हल है।
2. का, जब $f(x)=1$ है, $\lambda\neq1$ के लिये कोई हल नहीं होता।
3. जब $f(x)=x$ है, $\lambda=1$ के लिये कोई हल नहीं होता।
4. जब $f(x)=1$ है, $\lambda=1$ के लिये अनंत संख्या में हल हैं।

99. The integral equation

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}cos\left[\pi(x-t)\right]\varphi(t)dt=f(x)$$

has

1. a unique solution for $\lambda\neq1$ when $f(x)=x$.
2. no solution for $\lambda\neq1$ when $f(x)=1$.
3. no solution for $\lambda=1$ when $f(x)=x$.
4. infinite number of solutions for $\lambda=1$ when $f(x)=1$.

100. मानें कि $f(u)=u^3-u-1$ है।

1. प्रारम्भिक अनुमान $u^{(0)}=1.5$ से आरम्भ करके समीकरण $u=g(u)$ को नियत बिन्दु पुनरावृत्त करती है जहां $g(u)=u^3-1$ अभिसरित होता है।
2. प्रारम्भिक अनुमान $u^{(0)}=1.5$ से आरम्भ करके समीकरण $u=\tilde{g}(u)$ को नियत बिन्दु पुनरावृत्त करती है जहां $\tilde{g}(u)=\sqrt{1+u^3}$ अभिसरित होता है।
3. यदि u^* समीकरण $f(u)=0$ का मूल है व $u^*>1$, तब u^* समीकरण $u=g(u)$ का स्थाई नियत बिन्दु है।
4. $f(u)=0$ का मूल 1 और 2 के बीच में है।

100. Let $f(u)=u^3-u-1$.

1. Starting with the initial guess $u^{(0)}=1.5$, the fixed point iterates of the equation $u=g(u)$, where $g(u)=u^3-1$ converge.
2. Starting with the initial guess $u^{(0)}=1.5$, the fixed point iterates of the equation $u=\tilde{g}(u)$, where $\tilde{g}(u)=\sqrt{1+u^3}$ converge.

3. If u^* is a root of the equation $f(u)=0$ and $u^*>1$, then u^* is a stable fixed point of the equation $u=g(u)$.
4. $f(u)=0$ has a root between 1 and 2.

101. *अंतराल $[0,1]$ में e^t के मान की परिकलना करने के लिए $t_1=0, t_2=0.5$ और $t_3=1$ का चयन करें। मान लिजिए p एक द्विघाती बहुपद है जो e^t का अन्तर्वेशन करता है अर्थात $p(t_i)=e^{t_i}$, $i=1,2,3$. तब*

1. *बहुपद p, कुछ चुने हुए द्विघाती बहुपद L_1, L_2, L_3 के लिए, $L_1(t)+e^{1/2}L_2(t)+eL_3(t)$ रूप में लिखा जा सकता है।*
2. *यदि बहुपद p, $L_1(t)+e^{1/2}L_2(t)+eL_3(t)$ के रूप में लिखा जाता है, जहां L_1, L_2, और L_3 बहुपद है तब L_1, L_2, और L_3 विशिष्ट रूप से निर्धारित हैं।*
3. *यदि बहुपद p, $L_1(t)+e^{1/2}L_2(t)+eL_3(t)$, के रूप में लिखा जाता है तब L_1, L_2, या L_3 में से एक अवश्य ही रैखिक है।*
4. *बहुपद p विशिष्ट रूप से निर्धारित है।*

101. To compute the value of e^t in the interval $[0,1]$, pick $t_1=0, t_2=0.5$ and $t_3=1$. Let p be the quadratic polynomial that interpolates e^t, that is, $p(t_i)=e^{t_i}$, $i=1,2,3$. Then

1. the polynomial p can be written in the form $L_1(t)+e^{1/2}L_2(t)+eL_3(t)$ for some choice of quadratic polynomials L_1, L_2, L_3.
2. if the polynomial p is written in the form $L_1(t)+e^{1/2}L_2(t)+eL_3(t)$, where L_1, L_2 and L_3 are polynomials, then L_1, L_2, and L_3 are uniquely determined.
3. if p is written in the form $L_1(t)+e^{1/2}L_2(t)+eL_3(t)$, then one of L_1, L_2, or L_3 must be linear.
4. the polynomial p is uniquely determined.

102. *कार्तीय निर्देशांक प्रणाली में छोटे दोलन करते हुये एक लोलक की ऊर्जा निम्न में से किसके अनुपात में है :*

1. *आयाम का वर्ग ।*
2. *आवृत्ति का वर्ग ।*
3. *उसका द्रव्यमान ।*
4. *द्रव्यमान, आवृत्ति एवं आयम के गुणनफल का व्युत्क्रम ।*

102. The energy of a pendulum executing small oscillations in a Cartesian coordinate system is proportional to

1. square of the amplitude.
2. square of the frequency .
3. its mass.
4. inverse of the product of mass, frequency and amplitude.

एकक /Unit - IV

103. मानें कि $\{X_n : n \geq 0\}$ एवं X सामान्य प्रायिकता समष्टि में परिभाषित यादृच्छिक चर हैं । यह भी मानें कि X_n सभी अऋणात्मक हैं एवं जहाँ $0 \leq p \leq 1$ है, X, 0 या 1 का मूल्य क्रमशः प्रायिकतायें p एवं $1-p$ के साथ लेता है। निम्न कथनों में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं ?

1. यदि $p = 0$ है एवं X_n, बंटन में X पर अभिसरित होता है, तो X_n प्रायिकता में X पर अभिसरित होता है।
2. यदि $p = 1$ है एवं X_n, बंटन में X पर अभिसरित होता है, तो X_n प्रायिकता में X पर अभिसरित होता है।
3. यदि $0 < p < 1$ है एवं X_n, बंटन में X पर अभिसरित होता है, तो X_n प्रायिकता में X पर अभिसरित होता है।
4. यदि X_n प्रायिकता में X पर अभिसरित होता है, तो X_n प्रायः निश्चित रूप से X पर अभिसरित होता है।

103. Let $\{X_n : n \geq 0\}$ and X be random variables defined on a common probability space. Further assume that X_n's are nonnegative and X takes values 0 and 1 with probability p and $1 - p$ respectively, where $0 \leq p \leq 1$. Which of the following statements are necessarily true?

1. If $p = 0$ and X_n converges to X in distribution, then X_n converges to X in probability.
2. If $p = 1$ and X_n converges to X in distribution, then X_n converges to X in probability.
3. If $0 < p < 1$ and X_n converges to X in distribution, then X_n converges to X in probability.
4. If X_n converges to X in probability, then X_n converges to X almost surely.

104. मानें कि X प्राचल $\left(11, \frac{1}{3}\right)$ के साथ का एक द्विपद यादृच्छिक चर है। k के किस/किन मूल्य/मूल्यों पर $P(X=k)$ उच्चतमीकृत होता है?

1. $k=2$.
2. $k=3$.
3. $k=4$.
4. $k=5$.

104. Let X be a binomial random variable with parameters $\left(11, \frac{1}{3}\right)$. At which value(s) of k is $P(X=k)$ maximized?

1. $k=2$.
2. $k=3$.
3. $k=4$.
4. $k=5$.

105. मानें कि X, Y, Z, N(0,1) (मानक प्रसामान्य) के साथ के स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं। मानें कि $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ यदि $x \geq 0$ है, तो $f(x)=1$ से एवं यदि $x<0$ है, तो $f(x)=-1$ से परिभाषित है। मानें कि U, V, W, $U=|X|\cdot f(Y)$, $V=|Y|\cdot f(X)$, $W=|Z|\cdot f(X)$ से परिभाषित हैं। तो

1. U एवं V N(0,1) बंटन के साथ स्वतंत्र हैं ।
2. U एवं W N(0,1) बंटन के साथ स्वतंत्र हैं ।
3. V एवं W N(0,1) बंटन के साथ स्वतंत्र हैं ।
4. U, V एवं W स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं ।

105. X, Y, Z are independent random variables with N(0,1) (standard normal) distribution. Let $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ be defined by $f(x)=1$, if $x\geq 0$ and $f(x)=-1$, if $x<0$. Let U, V, W be defined by $U=|X|\cdot f(Y)$, $V=|Y|\cdot f(X)$, $W=|Z|\cdot f(X)$. Then

1. U and V are independent each having a N(0,1) distribution.
2. U and W are independent each having N(0,1) distribution.
3. V and W are independent each having N(0,1) distribution.
4. U, V and W are independent random variables.

106. *समुच्चय $\{a, b, c, d\}$ से अक्षर प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयित इस प्रकार किये जाते हैं : चरण n में एक अक्षर को देखने के बाद, चरण $(n+1)^{th}$ में एक दूसरा अक्षर बाकी तीनों में से समान प्रायिकता 1/3 के साथ प्रतिचयित किया जाता है। मानें कि X_n, चरण n में चयन किये गये अक्षर को निर्दिष्ट करता है। मार्कोव श्रंखला X_n के लिये निम्न में से कौन–से आवश्यकत: सही हैं ?*

1. $P[X_n = a]$, 1/3 *पर अभिसरित होता है।*
2. $P[X_n = b]$, 1/4 *पर अभिसरित होता है।*
3. c *के देखे जाने का माध्य अनुपात* $\frac{1}{4}$ *पर अभिसरित होता है।*
4. *यह श्रृंखला अलघुकरणीय नहीं है।*

106. One chooses letters with replacement from the set $\{a, b, c, d\}$ as follows:

After one letter is observed at step n, in $(n+1)^{th}$ step another letter will be chosen from the other three with equal probability 1/3. Let Xn denote the letter chosen at the nth step. Which of the following are necessarily true for the Markov chain X_n?

1. $P[X_n = a]$ converges to 1/3.
2. $P[X_n = b]$ converges to 1/4.
3. The average proportion of times c is observed converges to $\frac{1}{4}$.
4. The chain is <u>not</u> irreducible.

107. *स्थिति समष्टि {0, 1} पर संक्रमण प्रायिकता आव्यूह P के साथ के एक मार्कोव श्रंखला $\{X_n : n \geq 0\}$ पर विचारें। निम्न कथनों में से कौन–से आवश्यकत: सही हैं ?*

1. *जब* $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ *है,* $i = 0, 1$ *के लिये* $\lim_{n\to\infty} P_\nu[X_n = i]$ *अभिसरित होता है, परंतु सीमायें प्रारंभिक बंटन* ν *पर निर्भर हैं।*
2. *जब* $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *है,* $\lim_{n\to\infty} P_\nu[X_n = 1]$ *का अस्तित्व है एवं सभी प्रारंभिक बंटन* ν *के चयन के लिये धनात्मक है।*

3. जब $P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ है, $\lim\limits_{n\to\infty} P_v[X_n=0]$ प्रारंभिक बंटन v के किसी भी चयन के लिये अस्तित्व नहीं रखता।
4. जब $P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ है, $\lim\limits_{n\to\infty} P_v[X_n=0]$ का हमेशा अस्तित्व रहता है, परंतु प्रारंभिक बंटन v के कुछ चयनों के लिये शून्य हो सकता है।

107. Consider a Markov chain $\{X_n : n \geq 0\}$ on the state space $\{0, 1\}$ with transition probability matrix P. Which of the following statements are necessarily true?

1. When $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_v[X_n=i]$ converges for $i = 0, 1$, but the limits depend on the initial distribution v.
2. When $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_v[X_n=1]$ exists and is positive for all choices of the initial distribution v.
3. When $P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_v[X_n=0]$ does not exist for any choice of the initial distribution v.
4. When $P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_v[X_n=0]$ always exists, but may be 0 for some choice of the initial distribution v.

108. मानें कि X_1 तथा X_2 दो स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं जहाँ $X_1\sim$ द्विपद $(m,\frac{1}{2})$ एवं $X_2 \sim$ द्विपद $(n,\frac{1}{2})$, $m\neq n$ हैं। निम्न में से कौन से हमेशा सही हैं ?

1. $2X_1 + 3X_2 \sim$ द्विपद $(2m+3n,\frac{1}{2})$.
2. $X_2 - X_1 + m \sim$ द्विपद $(m+n,\frac{1}{2})$.
3. (X_1+X_2) प्राप्त होने के पश्चात् X_2 का प्रतिबंधित बंटन हाईपरजियेमितिक है।
4. $X_1 - X_2$ का बंटन 0 के दोनों तरफ सममित है।

108. Let X_1 and X_2 be two independent random variables with $X_1\sim$ binomial $(m,\frac{1}{2})$ and $X_2 \sim$ binomial $(n,\frac{1}{2})$, $m\neq n$. Which of the following are always true?

1. $2X_1 + 3X_2 \sim$ binomial $\left(2m+3n, \frac{1}{2}\right)$.
2. $X_2 - X_1 + m \sim$ binomial $\left(m+n, \frac{1}{2}\right)$.
3. Conditional distribution of X_2 given $(X_1 + X_2)$ is hypergeometric.
4. Distribution of $X_1 - X_2$ is symmetric about 0.

109. मानें कि $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $(n \geq 3)$ एक समान बंटन $(\theta - 5, \theta - 3)$ से निकाला एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। मानें कि $X_{(1)}$ एवं $X_{(n)}$ क्रमशः प्रतिदर्श के न्यूनतम तथा महत्तम मान को निर्दिष्ट करते हैं। तो निम्न में से कौन से हमेशा सही हैं ?

1. $(X_{(1)}, X_{(n)})$, θ के लिये पूर्णतयः पर्याप्त है।
2. $X_1 + X_2 - 2X_3$ एक सहायक प्रतिदर्शज है।
3. $X_{(n)} + 3$, θ के लिये अनभिनत है।
4. $X_{(1)} + 5$, θ के लिये अविरोधी है।

109. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $(n \geq 3)$ be a random sample from uniform $(\theta - 5, \theta - 3)$. Let $X_{(1)}$ and $X_{(n)}$ denote the smallest and largest of the sample values. Then which of the following are always true?

1. $(X_{(1)}, X_{(n)})$ is complete sufficient for θ.
2. $X_1 + X_2 - 2X_3$ is an ancillary statistic.
3. $X_{(n)} + 3$ is unbiased for θ.
4. $X_{(1)} + 5$ is consistent for θ.

110. मानें कि $X \sim$ प्वासों (θ), θ का पूर्व बंटन मध्यिका $\log_e 2$ के साथ चरघातांकी है, एवं हानि फलन त्रुटि का वर्ग है। तो निम्न में से कौन–से आवश्यकतः सही हैं?

1. उत्तर बंटन गामा है।
2. पूर्व एक संयुग्मी पूर्व है।
3. उत्तर माध्य $\dfrac{(x+1)\log_e 2}{1+\log_e 2}$ है।
4. θ का बेज आकलक $\dfrac{X+1}{2}$ है।

110. Let $X \sim$ Poisson (θ), the prior distribution of θ be exponential with median $\log_e 2$ and the loss function be squared error. Then which of the following are necessarily true?

1. The posterior distribution is Gamma.
2. The prior is a conjugate prior.
3. The posterior mean is $\dfrac{(x+1)\log_e 2}{1+\log_e 2}$.
4. The Bayes estimator of θ is $\dfrac{X+1}{2}$.

111. मानें कि X_1, X_2, X_3, $X_1 \sim N(1, 1)$, $X_2 \sim N(-1, 1)$ एवं $X_3 \sim N(0, 1)$ के साथ स्वतंत्र हैं। मानें कि

$$q_1 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + 2X_3^2 + 2X_1X_2}{2} \text{ एवं}$$

$$q_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2}{2} \text{ हैं।}$$

तो निम्न कथनों में से कौन से हमेशा सही हैं ?

1. q_1 का एक मध्य काई–वर्ग बंटन है।
2. q_2 का एक मध्य काई–वर्ग बंटन है।
3. $q_1 + q_2$ का एक मध्य काई–वर्ग बंटन है।
4. q_1 तथा q_2 स्वतंत्र है।

111. Let X_1, X_2 and X_3 be independent with $X_1 \sim N(1, 1), X_2 \sim N(-1, 1)$ and $X_3 \sim N(0, 1)$. Let

$$q_1 = \frac{X_1^2 + X_2^2 + 2X_3^2 + 2X_1X_2}{2},$$

$$q_2 = \frac{X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2}{2}.$$

Then which of the following statements are always true?

1. q_1 has a central chi-square distribution.
2. q_2 has a central chi-square distribution.
3. $q_1 + q_2$ has a central chi-square distribution.
4. q_1 and q_2 are independent.

112. लिथियम बैटरियों के एक दल के आयुकाल (जो घंटों में मापा जाता है) स्वतंत्र हैं एवं $t \geq 0, \lambda > 0$ के लिये $f(t) = \lambda^2 te^{-\lambda t}$ घनत्व के साथ सर्वथासम बंटित है। इस दल से एक बैटरी की परीक्षण की जाती है एवं यह देखा जाता है कि वह तीन घंटे बाद विफल होती है, जबकि एक दूसरी बैटरी दो घंटों तक बिना कोई विफलता के साथ देखी जाती है। निम्न कथनों में से कौन–से आवश्यकत: सही हैं?

1. यहाँ अवेष्टित खंड–वर्जन टाईप II का है।
2. λ की संभाविता $\lambda^2(1+3\lambda)e^{-5\lambda}$ की अनुपात में है।
3. λ का उच्चतम संभाविता आकल 2 है।
4. $\frac{1}{\lambda}$ का उच्चतम संभाविता आकल 2 है।

112. The lifetimes (measured in hours) of a batch of lithium batteries are independent and identically distributed with density $f(t) = \lambda^2 te^{-\lambda t}, t \geq 0, \lambda > 0$. One battery from this batch is put to test and is observed to fail after 3 hours, while another battery is observed for 2 hours with no failure. Which of the following statements are necessarily correct?

1. The censoring involved here is of type II.
2. The likelihood for λ is proportional to $\lambda^2(1+3\lambda)e^{-5\lambda}$.
3. The maximum likelihood estimate of λ is 2.
4. The maximum likelihood estimate of $\frac{1}{\lambda}$ is 2.

113. एक अनुक्रिया चर (Y) एवं एक कारण चर (X) के प्रेक्षणों के युगल, जो स्वतंत्र एवं सर्वथा समान रूप से बंटित हैं, को अंतर्विष्ट करते रैखिक समाश्रयण आसंजन में यह सूचित करें कि निम्न कथनों में से कौन–से आवश्यकत: सही हैं?

1. Y के X पर समाश्रयण के अवशिष्टों के प्रसरण समान होते हैं।
2. Y को X एवं X^2 पर समाश्रयण आसंजन करके अभिकलित बहु–सहसंबंध वर्ग R^2, Yको केवल X पर समाश्रयण आसंजन करके अभिकलित मूल्य से कम हो नहीं सकता।
3. Y को X एवं X^2 पर समाश्रयण आसंजन करके अभिकलित समंजित R^2, Yको केवल X पर समाश्रयण आसंजन करके अभिकलित मूल्य से कम हो नहीं सकता।
4. Y को X एवं X^2 पर समाश्रयण करके आकलित समाश्रयण गुणांक का प्रसरण, Yको केवल X पर समाश्रयण आसंजन करके अभिकलित मूल्य से अधिक है।

113. In the linear regression fit involving independent and identically distributed pairs of observations of a response variable (Y) and an explanatory variable (X), indicate which of the following statements are necessarily correct?

1. The residuals of the regression of Y on X have the same variance.
2. The multiple R^2 computed from the regression fit of Y on X and X^2 cannot be smaller than that computed from the regression fit of Y on X alone.
3. The adjusted R^2 computed from the regression fit of Y on X and X^2 cannot be smaller than that computed from the regression fit of Y on X alone.
4. The variance of the estimated regression coefficient of X computed from the regression of Y on X and X^2 is larger than that computed from the regression of Y on X alone.

114. रैखिक प्रतिरूप $E(\underset{\sim}{Y})=X\underset{\sim}{\beta}$ पर विचारें, जहाँ $\underset{\sim}{Y}$ n प्रेक्षणों का सदिश है, एवं $\underset{\sim}{\beta}$ n प्राचलों का एक सदिश है। अभिकल्पित आव्यूह X के (i,j) वाँ अवयव इस रूप में है : $1+ij+i^2j^2,\ 1\le i,\ j\le \mathrm{n}$ । तो $\underset{\sim}{\beta}$ इसके लिये आकलित हो सकता है :

1. n = 20.   2. n = 3.   3. n = 10.   4. n = 50.

114. Consider a linear model $E(\underset{\sim}{Y})=X\underset{\sim}{\beta}$ where $\underset{\sim}{Y}$ is the vector of n observations and $\underset{\sim}{\beta}$ is the vector of n parameters. The $(i,j)^{th}$ element of the design matrix X is of the form: $1+ij+i^2j^2,\ 1\le i,\ j\le \mathrm{n}$. Then $\underset{\sim}{\beta}$ is estimable for

1. n = 20.   2. n = 3.   3. n = 10.   4. n = 50.

115. एक "संतुलित अपूर्ण खंड" अभिकल्पना जिसके प्राचल v, b, r, k, λ हैं निम्न में से किन मूल्य समुच्चयों के साथ कभी अस्तित्व नहीं पाता?

1. $v=11, b=22, r=6, k=3, \lambda=1$.   2. $v=21, b=4, r=4, k=21, \lambda=4$.
3. $v=7, b=7, r=4, k=4, \lambda=2$.   4. $v=7, b=7, r=3, k=3, \lambda=1$.

115. For which of the following set of values will a Balanced Incomplete Block design with parameters v, b, r, k, λ not exist?

1. $v = 11, b = 22, r = 6, k = 3, \lambda = 1$.
2. $v = 21, b = 4, r = 4, k = 21, \lambda = 4$.
3. $v = 7, b = 7, r = 4, k = 4, \lambda = 2$.
4. $v = 7, b = 7, r = 3, k = 3, \lambda = 1$.

116. हर एक 4 अमाप का, दो खंडों में रखे गये एक बबहुउपादानी अभिकल्पना के बारे में विचारें जो इस प्रकार है ।

Block 1: $\boxed{1 \quad a \quad b \quad c}$ Block 2: $\boxed{ab \quad ac \quad bc \quad abc}$

यहाँ येट्स् संकेत पद्धति में उपचार संयोजन लिखे गये हैं। तो निम्न में से कौनसे हमेशा सही हैं?

1. मुख्य प्रभाव A संकरित है।
2. मुख्य प्रभाव B असंकरित है।
3. अन्योन्यक्रियायें सभी AB, BC, AC असंकरित हैं।
4. अन्योन्यक्रिया ABC संकरित है।

116. Consider a 2^3 factorial design laid out in 2 blocks, each of size 4, as follows

Block 1: $\boxed{1 \quad a \quad b \quad c}$ Block 2: $\boxed{ab \quad ac \quad bc \quad abc}$

Here the treatment combinations are written in Yates' notation. Then which of the following are always true?

1. Main effect A is confounded.
2. Main effect B is unconfounded.
3. Interactions AB, BC, AC are all unconfounded.
4. Interaction ABC is confounded.

117. मानें कि , $N(\underset{\sim}{\mu},\Sigma)$ माध्य सदिश $\underset{\sim}{\mu}$ एवं परिक्षेपण आव्यूह Σ के साथ के एक बहुचर प्रसामान्य बंटन को निर्दिष्ट करता है । निम्न कथनों में से कौनसे सही है ?

1. $N(\underset{\sim}{\mu}_1,\Sigma_1)$ एवं $N(\underset{\sim}{\mu}_2,\Sigma_2)$ के आपस का बेज वर्गीकरक, एक देहली युक्त वर्गीकरणीय सदिश के रैखिक फलन की तुलना को समाविष्ट करता है ।
2. समष्टियाँ $N(\underset{\sim}{\mu}_1,\Sigma)$ एवं $N(\underset{\sim}{\mu}_2,\Sigma)$ के आपस के बेज वर्गीकरक के दुर्वर्गीकरण की प्रायिकता, समष्टियाँ $N(2\underset{\sim}{\mu}_1,2\Sigma)$ एवं $N(2\underset{\sim}{\mu}_2,2\Sigma)$ के आपस के बेज वर्गीकरक से अधिक है।
3. जब $\underset{\sim}{\mu}_1$ एवं $\underset{\sim}{\mu}_2$ अज्ञात हैं, $N(\underset{\sim}{\mu}_1,I)$ एवं $N(\underset{\sim}{\mu}_2,I)$ के आपस का उच्चतम संभाविता वर्गीकरक, जो दोनों समष्टियों से प्रतिदर्शित आँकड़ों पर आधारित है, केवल संगत प्रतिदर्श माध्यों के द्वारा आँकड़ों पर निर्भर है ।
4. $N(1,0)$ एवं $N(10,4)$ के आपस का बेज वर्गीकरक, आँकड़ा बिन्दु दो को प्रथम समष्टि से जुड़े हुये रूप में वर्गीकृत करेगा ।

117. Let $N\left(\underset{\sim}{\mu}, \Sigma\right)$ denote the multivariate normal distribution with mean vector $\underset{\sim}{\mu}$ and dispersion matrix Σ. Which of the following are correct?

1. The Bayes classifier between $N\left(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma_1\right)$ and $N\left(\underset{\sim}{\mu}_2, \Sigma_2\right)$ consists of comparing a linear function of the classifiable vector with a threshold.
2. The misclassification probability of the Bayes classifier between the populations $N\left(\underset{\sim}{\mu}_1, \Sigma\right)$ and $N\left(\underset{\sim}{\mu}_2, \Sigma\right)$ is more than that of the Bayes classifier between the populations $N\left(2\underset{\sim}{\mu}_1, 2\Sigma\right)$ and $N\left(2\underset{\sim}{\mu}_2, 2\Sigma\right)$.
3. When $\underset{\sim}{\mu}_1$ and $\underset{\sim}{\mu}_2$ are unknown, the maximum likelihood classifier between $N\left(\underset{\sim}{\mu}_1, \mathrm{I}\right)$ and $N\left(\underset{\sim}{\mu}_2, \mathrm{I}\right)$, based on sampled data from the two populations, depends on the data only through the respective sample means.
4. The Bayes classifier between $N(1,0)$ and $N(10,4)$ would classify the data point 2 as belonging to the first population.

118. *जनसंख्या से 50 वयस्क व्यक्ति यादृच्छिक रूप से, तंबाकू सेवन एवं फेफड़ा–कैंसर के बीच के संबंध के अध्ययन हेतु चुने जाते हैं। इन 50 व्यक्तियों के लिये प्रश्न* (i) *"क्या आप सिगरेट/बीड़ी पीते हैं?"* (ii) *"क्या आप फेफड़ा–कैंसर से पीड़ित हैं?" के उत्तर निम्न* 2×2 *तालिका की ओर ले जाते हैं ।*

Lung Cancer

Smoking habit	Yes	No
Yes	15	5
No	10	20

तो निम्न कथनों में से कौनसे 5% सार्थकता के स्तर पर सही हैं ?
(ध्यान दें : काई–वर्ग बंटन के 95वाँ शततमक 3.841 है जब स्वतंत्रता की कोटि 1 है)

1. *फेफड़ा–कैन्सर एवं तंबाकू–सेवन सार्थक रूप से संबंधित हैं।*
2. *फेफड़ा–कैन्सर एवं तंबाकू–सेवन असंबंधित हैं।*
3. *तंबाकू–सेवन करने वाले एवं न करने वाले समाष्टियों में फेफड़ा–कैन्सर से पीड़ित व्यक्तियों की अनुपात सार्थक रूप से भिन्न है।*
4. *फेफड़ा–कैन्सर से पीड़ित एवं न पीड़ित व्यक्तियों की समष्टियों में तंबाकू–सेवन करने वालों की अनुपात सार्थक रूप से भिन्न है।*

118. To study the relationship between smoking and lung cancer, 50 adult individuals are randomly selected from the population. For these 50 individuals, the responses to the questions (i) "Do you smoke?" (ii) "Do you have lung cancer?" lead to the following 2×2 table.

Smoking habit		Lung Cancer	
		Yes	No
	Yes	15	5
	No	10	20

Then which of the following statements are correct at 5% level of significance? (Note: 95^{th} percentile of the chi-square distribution with 1 d.f. is 3.841).

1. Lung cancer and smoking habits are significantly related.
2. Lung cancer and smoking habits are independent.
3. The proportions of individuals with lung cancer are significantly different in the smoking and non-smoking populations.
4. The proportions of smokers in the populations of individuals with or without lung cancer are significantly different.

119. मानें कि X एक विविक्त यादृच्छिक चर है, जिसकी प्रायिकता द्रव्यमान फलन $p(x)$ है, जहाँ $x \in \{-1,0,1,2,3\}$ है। परीक्षण करने के लिये परिकल्पनायें हैं $H_0 : p(x) = p_0(x)$ बनाम $H_1 : p(x) = p_1(x)$ जहाँ $p_0(x)$ एवं $p_1(x)$ निम्नानुसार हैं।

x	-1	0	1	2	3
$p_0(x)$	0.01	0.02	0.05	0.32	0.60
$p_1(x)$	0.04	0.08	0.25	0.03	0.60

तो

1. स्तर $\alpha = 0.05$ पर शक्ततम परीक्षण का क्रांतिक क्षेत्र $\{1\}$ है।
2. स्तर $\alpha = 0.03$ पर शक्ततम परीक्षण का क्रांतिक क्षेत्र $\{-1, 0\}$ है।
3. स्तर $\alpha = 0.06$ पर शक्ततम परीक्षण का क्रांतिक क्षेत्र $\{-1, 1\}$ है।
4. स्तर $\alpha = 0.08$ पर शक्ततम परीक्षण का क्रांतिक क्षेत्र $\{-1, 0, 1\}$ है।

119. Let X be a discrete random variable with probability mass function $p(x)$, $x \in \{-1,0,1,2,3\}$. The hypotheses to be tested are

$$H_0 : p(x) = p_0(x) \text{ versus } H_1 : p(x) = p_1(x),$$

where $p_0(x)$ and $p_1(x)$ are as given below.

x	-1	0	1	2	3
$p_0(x)$	0.01	0.02	0.05	0.32	0.60
$p_1(x)$	0.04	0.08	0.25	0.03	0.60

Then

1. $\{1\}$ is the critical region of an MP test at level $\alpha = 0.05$.
2. $\{-1, 0\}$ is the critical region of an MP test at level $\alpha = 0.03$.
3. $\{-1, 1\}$ is the critical region of an MP test at level $\alpha = 0.06$.
4. $\{-1, 0, 1\}$ is the critical region of an MP test at level $\alpha = 0.08$.

120. *एक रैखिक प्रक्रमन समस्या उच्चतम*

$$\underset{\underset{\sim}{x}}{\text{उच्चतम}}\ \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}, \quad A\underset{\sim}{x} \le \underset{\sim}{b}, \ \underset{\sim}{x} \ge \underset{\sim}{0} \ \text{से प्रतिबंधित}$$

दो भिन्न सुसंगत हल पर अनुकूलतम मूल्य को प्राप्त करता है। निम्न में से क्या/क्या–क्या सही होना चाहिये?

1. *जहाँ अनुकूलतम मूल्य की प्राप्ति होती है, तहाँ अनंततः बहुत सुसंगत हलों का अस्तित्व होना चाहिये।*
2. *सभी सुसंगत हल अनुकूलतम हल होने चाहिये।*
3. *प्रतिसमस्या का अपरिबद्ध सुसंगत प्रांत है।*
4. $\begin{pmatrix} \underset{\sim}{c}' \\ A \end{pmatrix}$ *की जाति* $= A$ *की जाति*

120. A linear programming problem

$$\max_{\underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{x}, \ \text{subject to } A\underset{\sim}{x} \le \underset{\sim}{b}, \ \underset{\sim}{x} \ge \underset{\sim}{0},$$

attains the optimum value at two distinct feasible solutions. Which of the following must be true?

1. There must be infinitely many feasible solutions where the optimal value is attained.
2. All feasible solutions must be optimal solutions.
3. The dual problem has unbounded feasible region.
4. Rank of $\begin{pmatrix} \underset{\sim}{c}' \\ A \end{pmatrix}$ = Rank of A.

रफ़ कार्य/ROUGH WORK